

Introduction à la théorie des jeux

Brèves notes de cours adaptées du cours de Tristan Garrec et du livre intitulé “Bases mathématiques de la théorie des jeux” de Rida Laraki, Jérôme Renault et Sylvain Sorin

Dylan Laplace Mermoud

Dernière mise à jour : 9 mars 2026

Table des matières

Introduction et jeux sous forme simple	2
1.1 Introduction	2
1.2 Exemples	4
1.3 Jeux sous forme simple	8
Équilibres de Nash	15
2.1 Équilibres de Nash : premières définitions	15
2.2 Stratégies mixtes	18
2.3 Équilibres de Nash en stratégies mixtes	20
2.4 Identification des équilibres de Nash	22
Jeux à deux joueurs à somme nulle	24
3.1 Premières définitions	24
3.2 Stratégies optimales	26
3.3 Valeurs en stratégies mixtes	29
3.4 Lien avec la programmation linéaire	31
Jeux sous forme extensive	32
4.1 Premières définitions	32
4.2 Stratégies et forme normale	35
4.3 Sous-jeux et équilibre parfait en sous-jeux	38
Équilibres corrélés	40
5.1 Premiers exemples	40
5.2 Définitions formelles	43
5.3 Prolongements	46

※ Introduction et jeux sous forme simple

1.1 Introduction

La théorie des jeux est le domaine des mathématiques qui étudie les interactions stratégiques entre agents rationnels. Mathématiquement, un jeu peut prendre de nombreuses formes, dont certaines que nous aborderons dans ce cours. Il existe globalement trois grands sous-domaines de la théorie des jeux, dont les intersections sont non-vides :

- ▷ la *théorie des jeux stratégiques*, dont l'étude porte sur les choix de profils de stratégies choisies par des agents rationnels,
- ▷ la *théorie des jeux coalitionnels*, qui se concentre plus sur l'étude de concept de solutions satisfaisant un ensemble de propriétés précises, et sur la formation de coalitions et de structures combinatoires définies sur lesdites coalitions,
- ▷ la *théorie du choix social*, qui s'intéresse principalement à la prise de décision collective, et la manière dont les agents participent à cette prise de décision en fonction des règles décidées préalablement.

Durant ce cours, nous nous intéresserons seulement à la théorie des jeux stratégiques. Dans un jeu stratégique, des agents indépendants dans leur prise de décision choisissent des actions impactant leur environnement.

On suppose que ces agents sont rationnels, dans le sens où ils cherchent à agir de manière cohérente par rapport à un but qu'ils se sont fixé et qui est généralement représenté par une *fonction d'utilité* qu'ils cherchent à maximiser.

Les agents modélisés dans un jeu peuvent être des pays, des animaux, des entreprises, des algorithmes, et pas seulement des êtres humains individuels.

1.1.1 Bref historique de la théorie des jeux

Les origines de la théorie des jeux sont floues, et remontent au moins au dix-neuvième siècle, avec les travaux de Cournot et Condorcet, bien que des analyses de certains jeux spécifiques ont été rédigées bien avant. Cournot a en particulier étudié les situations d'oligopoles. Dans sa publication *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, il a présenté un concept de solution pour ces situations qui correspond à ce que l'on appelle aujourd'hui un équilibre de Nash.

Le développement de la théorie des jeux a connu une grande accélération au début du vingtième siècle avec les travaux de Zermelo, Borel et von Neumann. En particulier, en 1913, Zermelo a publié le résultat suivant.

Théorème 1.1 (Zermelo, informel).

Dans tout jeu fini, au tour par tour, à deux joueurs, à information complète et sans hasard, soit le premier joueur à agir peut forcer le gain, soit le second joueur peut forcer le gain, soit chacun des deux joueurs peut forcer le match nul.

Si on applique ce résultat au jeu d'échecs, qui est bien un jeu fini au tour par tour à deux joueurs et à information complète sans hasard, alors soit les blancs ont une stratégie gagnante, soit les noirs, soit les deux joueurs peuvent forcer la partie à être nulle. Cependant, savoir que ces stratégies existent n'aident en rien à les identifier.

La théorie des jeux moderne telle qu'on la connaît aujourd'hui vient en très grande partie du livre "Theory of Games and Economic Behavior" de John von Neumann et Oskar Morgenstern, publié en 1944. Dans ces travaux, ils exposent des premiers résultats sur l'existence d'équilibres dans les jeux à somme nulle à deux joueurs, qui avaient été démontrés par le premier auteur près de 20 ans plus tôt. On y retrouve aussi les premiers développements de la théorie des jeux coalitionnels et de la théorie de l'utilité espérée, qui a permis l'étude de la prise de décision sous incertitude.

Les résultats sur l'existence d'équilibre ont été largement généralisés en 1950 par John Nash, et ces équilibres portent aujourd'hui son nom. Depuis, la théorie des jeux s'est grandement diversifiée, et de nombreux théoriciens des jeux, en particulier Nash, Shapley, Aumann, Harsanyi, et plus récemment Tirole ou Milgrom ont reçu le prix Nobel pour leurs travaux.

Depuis, la théorie des jeux s'applique à de nombreux domaines :

- en économie,
- en informatique (théorie des jeux algorithmique, théorie des automates, théorie du choix social),
- en biologie (théorie des jeux évolutionniste),
- en recherche opérationnelle (jeux de congestion, jeux d'inspection, jeux de marchés, jeux de flots, jeux de productions linéaires, jeux d'affectation, etc)
- en mathématiques, et plus particulièrement en théorie des équations aux dérivées partielles pour les jeux différentiels et à champs moyens, et en combinatoire et combinatoire algébrique pour les jeux coalitionnels, etc.

1.1.2 Organisation du cours

L'objectif de ces cinq séances est de présenter quelques fondements de la théorie des jeux stratégiques. Le cours se décompose de la façon suivante :

- ▷ Première partie : introduction, motivations, et exemples ;
- ▷ Deuxième partie : jeux sous forme normale ;
- ▷ Troisième partie : jeux à deux joueurs à somme nulle ;
- ▷ Quatrième partie : jeux sous forme extensive ;
- ▷ Cinquième partie : les équilibres corrélés.

Le cours est en grande partie inspiré du cours de Tristan Garrec, et se base sur :

- ▷ “Bases mathématiques de la théorie des jeux”, Rida Laraki, Jérôme Renault et Sylvain Sorin (2013) ;
- ▷ “Game Theory”, Michael Maschler, Eilon Solan et Shmuel Zamir (2013).

1.2 Exemples

1.2.1 Appariements stables, Gale et Shapley (1962)

Soient A et B deux ensembles de mêmes cardinalités n . On peut supposer que les éléments de A soient des lycéens candidatant à des universités qui composent l'ensemble B . On suppose, pour simplifier, que chaque université ne peut accueillir qu'un seul nouvel étudiant par an.

Chaque élément a des préférences strictes sur les éléments de l'autre ensemble.

Definition 1.2. Soit X un ensemble. Une *relation de préférence* sur X est une relation binaire $>$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- ▷ pour toute paire $(x, y) \in X^2$ telle que $x \neq y$, on a soit $x > y$ ou $y > x$ (complétude, c'est-à-dire, chaque paire d'éléments distincts est comparable) ;
- ▷ pour tout $x \in X$, on a $x \not> x$ (non-réflexivité) ;
- ▷ pour tout triplet $(x, y, z) \in X^3$, si $x > y$ et $y > z$, alors $x > z$ (transitivité).

On note par $a : b_1 > b_2$ la préférence de l'élément a entre les éléments b_1 et b_2 .

Un appariement est simplement une bijection $\mu : A \rightarrow B$. On cherche ici un appariement qui prend en compte les préférences des éléments des deux ensembles.

Definition 1.3. Une paire $(a, b) \in A \times B$ s'oppose à un appariement μ si on a

- ▷ $\mu(a) \neq b$, c'est-à-dire que a et b ne sont pas appairés, et
- ▷ $a : b > \mu(a)$, i.e., a préfère b à l'élément avec lequel il est appairé, et
- ▷ $b : a > \mu^{-1}(b)$, i.e., b préfère a à l'élément avec lequel il est appairé.

Un appariement est dit *stable* si il aucune paire ne s'y oppose.

Théorème 1.4 (Gale et Shapley, 1962).

À chaque problème d'appariement, il existe un appariement stable.

La preuve de ce théorème est directement donnée par l'existence d'un algorithme identifiant un appariement stable, que nous détaillons plus bas. Il existe un algorithme pour chaque côté de l'appariement, nous nous mettons ici du côté des lycéens.

Algorithm 1: Algorithme de Gale-Shapley

```

chaque lycéen envoie sa candidature à l'université qu'il préfère
chaque université garde le dossier du lycéen qu'elle préfère, le met en
attente, et rejette les autres candidatures
while il existe un lycéen sans université do
    chaque lycéen sans université choisit celle qu'il préfère parmi celles
    qui restent
    chaque université met de côté le dossier de l'étudiant qu'elle préfère
    parmi les nouvelles candidatures et le dossier mis de côté à l'étape
    précédente
end

```

Il est possible d'appliquer l'algorithme dans l'autre sens, c'est-à-dire de laisser les universités contacter les lycéens qu'elles préfèrent, et aux lycéens de mettre en attente et rejeter les propositions des universités, ce qui donne un autre appariement stable.

Exemple 1. Nous avons un ensemble de 4 universités :

$$U = \{\text{Amsterdam, Cambridge, Edimburgh, Sorbonne}\},$$

et un ensemble de 4 lycéens,

$$L = \{\text{Alice, Bob, Carol, Dave}\}.$$

Les préférences de chacun des lycéens ou des universités sont représentées ci-dessous.

	1 ^{er}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}		1 ^{er}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}
Alice	Amst.	Camb.	Edim.	Sorb.	Amst.	Dave	Carol	Alice	Bob
Bob	Amst.	Sorb.	Edim.	Camb.	Camb.	Bob	Dave	Alice	Carol
Carol	Camb.	Amst.	Edim.	Sorb.	Edim.	Dave	Alice	Bob	Carol
Dave	Sorb.	Camb.	Edim.	Amst.	Sorb.	Carol	Bob	Alice	Dave

(a) Préférences des lycéens.

(b) Préférences des universités.

On applique l'algorithme de Gale-Shapley du côté des lycéens.

1. Alice et Bob envoient leurs candidatures à Amsterdam, Carol l'envoie à Cambridge, et Dave à la Sorbonne.
 - L'université d'Amsterdam a reçu deux candidatures, elle a donc le choix et choisit de refuser Bob.
2. Bob n'est mis en attente par aucune université, il envoie alors sa candidature à l'université qu'il a classé deuxième, la Sorbonne.
 - La Sorbonne a maintenant deux candidatures, celle de Dave reçue à l'étape précédente, et celle de Bob. Préférant Bob à Dave, elle refuse Dave.
3. Dave se retrouve maintenant sans université, il envoie donc une candidature à son deuxième choix, Cambridge.
 - Cambridge choisit entre Dave et Carol, et, préférant Dave, refuse Carol.
4. Carol envoie sa candidature à l'université d'Amsterdam.
 - L'université d'Amsterdam choisit de garder Carol et refuse Alice qui était en attente.
5. Alice envoie sa candidature chez Cambridge.
 - Cambridge la refuse, préférant Dave.
6. Alice envoie sa candidature à l'université d'Edimburgh.

On a alors l'appariement suivant :

$$\begin{aligned}
 \mu(\text{Alice}) &= \text{Edimburgh}, & \mu(\text{Bob}) &= \text{Sorbonne}, \\
 \mu(\text{Carol}) &= \text{Amsterdam}, & \mu(\text{Dave}) &= \text{Cambridge}.
 \end{aligned}$$

Lors de cet exemple, on a vu que les lycéens étaient ceux qui choisissent en premier. Ainsi, ils descendent au fur et à mesure de leur liste de préférence. Au contraire, les universités remontaient dans leur liste de préférence. Aussi, une fois qu'une université a reçu une candidature, à chaque étape, elle aura au moins un lycéen prêt à l'intégrer.

Nous verrons lors de la séance de travaux dirigés les propriétés suivantes :

- L'algorithme converge ;
- L'algorithme converge en au plus n^2 étapes ;
- L'appariement retourné est stable ;
- Il n'y a pas unicité des appariements, même stables.

L'algorithme de Gale-Shapley (généralisé) a été utilisé pour appairer des lycéens à des établissements d'enseignement supérieur par le système Admission Post Bac (APB), et par ParcoursSup. Il est également utilisé aux États-Unis pour répartir les étudiants diplômés en médecine dans les différents hôpitaux.

1.2.2 Le paradoxe de Braess (1968)

Considérons le réseau routier représenté par le graphe pondéré et dirigé suivant.

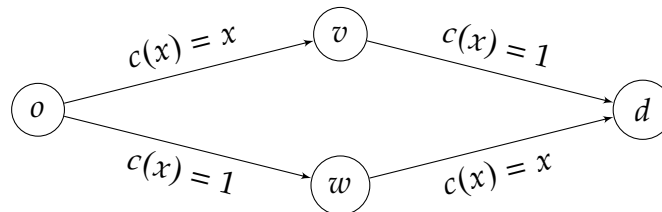


FIGURE 2 – Un premier réseau routier.

Des automobilistes, démarrant au sommet o , doivent rejoindre le sommet d le plus rapidement possible. Le label de chaque arc, compris entre 0 et 1, indique la durée de parcours de l'automobiliste, où x représente la proportion de voitures présentes sur l'arc. Ainsi, le temps de parcours du chemin (o, v, d) ou (o, w, d) est de $x + 1$.

Le temps de trajet étant similaire sur les deux chemins possibles, on peut estimer que chaque automobiliste a une chance sur deux d'utiliser l'un des deux arcs, et que le temps de trajet est $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ pour chaque route.

Supposons maintenant qu'une voie rapide, que l'on peut traverser instantanément, soit construite entre les sommets v et w .

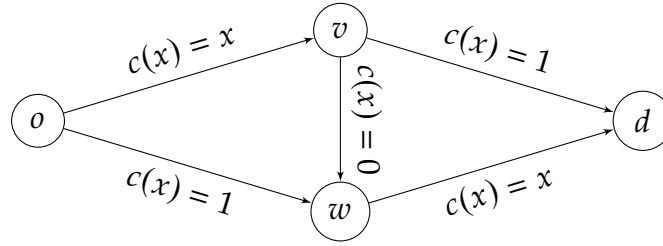


FIGURE 3 – Ajout d'une voie rapide.

Analysons la situation. Comme x représente une proportion, on a $0 \leq x \leq 1$. Il y a maintenant trois chemins possibles, comprenant les deux qui étaient déjà mentionnés et (o, v, w, d) . Le coût de ce nouveau chemin est $2x$, qui est nécessairement plus faible que le coût $1 + x$ des deux autres chemins. Or, si tout le monde empreinte ce chemin, on a $x = 1$, donc un coût de 2, qui est plus élevé que le coût de chacun des autres chemins avant la construction de la voie rapide.

On voit apparaître dans ce problème une différence claire entre un optimum social, qui consisterait à diviser le trafic en deux pour lui faire emprunter les deux chemins initiaux en parallèle, et l'application de stratégies individuelles par chacun des joueurs qui mène à un coût plus élevé, ou un gain plus faible. Il s'agit plus ou moins du même problème que dans le *dilemme du prisonnier*.

Le *prix de l'anarchie*, défini par Koutsoupias et Papadimitriou, est une mesure de la non-efficacité d'un système lorsque les agents agissent individuellement pour leur seul intérêt. Il se calcule, dans notre cas, en divisant le meilleur temps de trajet possible pour chacun par le temps de trajet obtenu en laissant chaque individu choisir.

1.3 Jeux sous forme simple

Définition 1.5. Un *jeu sous forme normale* est la donnée

- ▷ d'un ensemble fini N dont les éléments sont appelés *joueurs* ;
- ▷ d'une famille d'ensembles $\{S_i\}_{i \in N}$, dont les éléments sont appelés *stratégies* ;
- ▷ et d'une famille de *fonctions de paiements* $\{g_i : \prod_{j \in N} S_j \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in N}$.

On dénote par S le produit cartésien $S := \prod_{i \in N} S_i$ de tous les ensembles de stratégies, et par S_{-i} le produit cartésien $S_{-i} := \prod_{j \in N \setminus \{i\}} S_j$ des ensembles de stratégies de tous les joueurs sauf le joueur i .

L'interprétation de ces données est la suivante : chaque joueur choisit une action dans son ensemble de stratégies. Ce choix est simultané et/ou indépendant, c'est-à-dire que le choix d'un joueur se fait sans observation d'une information quelconque pouvant le renseigner sur les choix faits par les autres joueurs. Le jeu est joué en une seule fois, et les joueurs ont choisi les actions $(s_1, \dots, s_n)$, alors le joueur i reçoit le paiement $g_i(s_1, \dots, s_n)$.

Lors de l'analyse de jeux, nous faisons plusieurs hypothèses implicites :

1. chaque joueur est "rationnel", c'est-à-dire qu'il cherche à maximiser g_i , peu importe ce que cette fonction représente ;
2. chaque joueur a une connaissance complète des fonctions de paiement et des ensembles de stratégies des autres joueurs. Autrement dit, on se place ici dans le cadre de jeux à *information complète* ;
3. chaque joueur sait que les autres joueurs sont rationnels, autrement dit, chaque joueur s'attend à ce que chacun maximise sa fonction de paiement en fonction des stratégies disponibles.

Exemple 2 (Jeu de coordination). Deux amis doivent décider (indépendamment) s'ils vont au cinéma ou au théâtre à une certaine heure. Alice préfère le cinéma tandis que Bob préfère le théâtre, mais tous deux préfèrent être ensemble que seul. Le jeu sous forme simple s'écrit donc :

- ▷ $N = \{\text{Alice}, \text{Bob}\}$;
- ▷ $S_1 = S_2 = \{C = \text{cinéma}, T = \text{théâtre}\}$;
- ▷ $g_1(C, C) = 2, g_1(T, T) = 1, g_2(C, C) = 1, g_2(T, T) = 2$ et $g_i(s_2, s_2) = 0$ sinon.

Il est bien souvent plus facile de lire un jeu à deux joueurs sous forme normale en tant que bimatrice. Dans ce cas, nous avons :

	C	T
C	2, 1	0, 0
T	0, 0	1, 2

Une bimatrice se lit de la façon suivante : le choix des lignes est propre au premier joueur, ici Alice, et le choix des colonnes dépend du second joueur, ici Bob. L'intersection entre les lignes et colonnes choisies donne le profil de paiement, le premier coefficient correspondant au paiement d'Alice, le second au paiement de Bob.

Exemple 3 (Tir de penalty). Un tireur de penalty et un gardien de but se font face. Le tireur peut tirer à gauche ou à droite, le gardien peut plonger à gauche ou à droite également. Le jeu sous forme normale s'écrit alors :

- ▷ $N = \{\text{gardien, tireur}\}$;
- ▷ $S_1 = S_2 = \{G = \text{gauche}, D = \text{droite}\}$;
- ▷ $g_1(s_1, s_2) = 1$ si $s_1 = s_2$ et -1 sinon. On a $g_2 = -g_1$.

La bimatrice équivalente s'écrit :

	G	D
G	$1, -1$	$-1, 1$
D	$-1, 1$	$1, -1$

Ce jeu est un jeu à *somme nulle*, le gain d'un joueur est la perte de l'autre. Il s'agit d'une importante classe de jeux, avec des propriétés particulières.

Exemple 4 (Le dilemme du prisonnier). Deux membres supposés d'une organisation criminelle sont arrêtés et interrogés. Chaque personne est dans une salle distincte avec aucun moyen de communication. Les enquêteurs avouent ne pas avoir assez d'éléments. Ils proposent alors à chacun des accusés de trahir l'autre personne, en échange d'une remise de peine.

Si une personne trahit son partenaire alors que l'autre s'est tu, elle ressort libre et le partenaire écope d'une peine de quatre ans de prison, et inversement. Si personne ne parle, les enquêteurs ont juste assez de preuve pour leur faire prendre chacun un an de prison. Si chacun trahit, bien que chacun ait un allègement de peine, il y a assez de preuves pour que chacun des joueurs fasse trois ans de prison.

Le jeu s'écrit :

- ▷ $N = \{j_1, j_2\}$;
- ▷ $S_1 = S_2 = \{S = \text{silence}, T = \text{trahir}\}$;
- ▷ On donne directement les fonctions de paiement sous forme de bimatrice:

	T	S
T	$-3, -3$	$0, -4$
S	$-4, 0$	$-1, -1$

Analysons la situation. Pour chacun des choix faits par l'autre joueur, la perte est toujours plus faible lorsque le joueur utilise la stratégie T que la stratégie S . En effet, si le joueur j_2 choisit de trahir, le joueur j_1 perd 3 en trahissant, ou 4 en se taisant. Si le joueur j_2 choisit au contraire de rester silencieux, le joueur j_1 peut sortir libre directement en trahissant, plutôt que de faire un an de prison en se taisant lui aussi. Il s'agit d'une *stratégie dominante*, concept que nous aborderons sous peu. Le jeu est symétrique, donc le joueur j_2 tient exactement le même raisonnement. Ainsi, si chaque joueur joue de cette manière, tout le monde fait 3 ans de prison, alors qu'il était possible que chacun n'en fasse qu'une. On se retrouve dans la même situation que le paradoxe de Braess.

Definition 1.6 (Stratégie dominée). Considérons un jeu sous forme normale, avec les notations usuelles, et i un joueur. Une stratégie $\sigma_i \in S_i$ est dite *strictement dominée* par $s_i \in S_i$ si pour tout $s_{-i} \in S_{-i}$, on a

$$g_i(\sigma_i, s_{-i}) < g_i(s_i, s_{-i}).$$

Un joueur rationnel, c'est-à-dire, qui cherche à maximiser sa fonction de paiement, n'a aucun intérêt à jouer une stratégie dominée, car il existe une stratégie alternative qui lui assure un paiement supérieur dans tous les scénarios possibles.

Definition 1.7 (Stratégie dominante). Une stratégie $\sigma_i \in S_i$ est *strictement dominante* si elle domine strictement toutes les autres stratégies, c'est-à-dire, pour tout $s_i \in S_i \setminus \{\sigma_i\}$, et pour tout $s_{-i} \in S_{-i}$, on a

$$g_i(\sigma_i, s_{-i}) > g_i(s_i, s_{-i}).$$

La relation de domination stricte définit un ordre strict partiel sur l'ensemble des stratégies de chacun des joueurs.

Definition 1.8 (Équilibre en stratégies strictement dominantes). Un profil de stratégie $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ est un *équilibre en stratégies strictement dominantes* si, pour tout joueur $i \in N$, la stratégie s_i est strictement dominante.

Il s'agit d'un équilibre relativement rare, car il n'existe pas souvent de stratégie strictement dominante. Cependant, si un équilibre en stratégies strictement dominantes existe, alors on peut s'attendre à ce qu'il soit joué par les joueurs.

Remarque 1.9. Dans l'exemple du jeu de coordination, aucune stratégie n'est strictement dominante, tout comme dans le jeu du tir de penalty. Cependant, comme nous avons déjà remarqué, l'action $T = \text{'trahir'}$ du dilemme du prisonnier est une stratégie strictement dominante.

Les hypothèses implicites que nous avons faites plus tôt impliquent plusieurs choses quant au comportement des joueurs :

1. si les joueurs sont rationnels, alors ils ne jouent pas de stratégie strictement dominée ;
2. si les joueurs ont une connaissance complète du jeu, ils savent que les autres joueurs ne vont pas jouer leurs stratégies strictement dominées ;
3. ainsi, lorsque chaque joueur analyse ses propres stratégies pour savoir lesquelles jouer, il doit prendre en compte les réflexions des autres joueurs, et par exemple ignorer les stratégies strictement dominées des autres joueurs, ce qui peut faire apparaître de nouvelles stratégies strictement dominées dans son propre ensemble de stratégies.

On peut ainsi appliquer une élimination itérée des stratégies strictement dominées d'un jeu lors de son analyse. Si au terme de cette procédure tous les ensembles d'actions sont des singletons, ils ne dépendent pas de l'ordre dans lequel on a supprimé des stratégies strictement dominées. Le jeu est dit *résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées*.

Exemple 5. Considérons le jeu suivant :

	A_2	B_2	C_2	D_2
A_1	5, 2	2, 6	1, 4	0, 4
B_1	0, 0	3, 2	2, 1	1, 1
C_1	7, 0	2, 2	1, 5	5, 1
D_1	9, 5	1, 3	0, 2	4, 8

Parmi les stratégies du second joueur, la stratégie A_2 est strictement dominée par D_2 , donc des joueurs rationnels ne font pas la différence entre le jeu initial et le jeu :

	A_2	B_2	C_2	D_2
A_1	5, 2	2, 6	1, 4	0, 4
B_1	0, 0	3, 2	2, 1	1, 1
C_1	7, 0	2, 2	1, 5	5, 1
D_1	9, 5	1, 3	0, 2	4, 8

À présent, la stratégie A_1 est strictement dominée par B_1 , et la stratégie D_1 est strictement dominée par C_1 . Ces deux stratégies ne seront donc jamais jouées, et la situation se simplifie un peu plus :

	A_2	B_2	C_2	D_2
A_1	5, 2	2, 6	1, 4	0, 4
B_1	0, 0	3, 2	2, 1	1, 1
C_1	7, 0	2, 2	1, 5	5, 1
D_1	9, 5	1, 3	0, 2	4, 8

Dorénavant, la stratégie D_2 est strictement dominée par la stratégie B_2 . On obtient la situation suivante :

	A_2	B_2	C_2	D_2
A_1	5, 2	2, 6	1, 4	0, 4
B_1	0, 0	3, 2	2, 1	1, 1
C_1	7, 0	2, 2	1, 5	5, 1
D_1	9, 5	1, 3	0, 2	4, 8

Enfin la stratégie C_1 est strictement dominée par B_1 , ainsi :

	A_2	B_2	C_2	D_2
A_1	5, 2	2, 6	1, 4	0, 4
B_1	0, 0	3, 2	2, 1	1, 1
C_1	7, 0	2, 2	1, 5	5, 1
D_1	9, 5	1, 3	0, 2	4, 8

Parmi les deux seules options qui restent, le joueur j_2 préfère jouer B_2 , donc C_2 est strictement dominée, et nous obtenons finalement :

	A_2	B_2	C_2	D_2
A_1	5, 2	2, 6	1, 4	0, 4
B_1	0, 0	3, 2	2, 1	1, 1
C_1	7, 0	2, 2	1, 5	5, 1
D_1	9, 5	1, 3	0, 2	4, 8

Le jeu est donc résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées, et il est attendu que les joueurs jouent le profil (B_1, B_2) .

On peut également définir une notion de faible domination.

Definition 1.10. La stratégie $\sigma_i \in S_i$ est *faiblement dominée* par $s_i \in S_i$ si pour tout $s_{-i} \in S_{-i}$, on a

$$g_i(\sigma_i, s_{-i}) \leq g_i(s_i, s_{-i}),$$

et il existe un profil $\sigma_{-i} \in S_{-i}$ tel que $g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) < g_i(s_i, \sigma_{-i})$.

La différence avec la définition de la domination stricte est que l'on demande une inégalité stricte que sur au moins un profil σ_{-i} , et non sur tous. De cette définition découlent les suivantes.

Definition 1.11. La stratégie $\sigma_i \in S_i$ est *dominante* si pour toute stratégie $s_i \in S_i$ et pour tout profil $s_{-i} \in S_{-i}$, on a

$$g_i(\sigma_i, s_{-i}) \geq g_i(s_i, s_{-i}).$$

Definition 1.12. Un profil de stratégie $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ est un *équilibre en stratégies dominantes* si pour tout joueur $i \in N$, la stratégie s_i est dominante.

Cependant, il n'y a plus unicité lors d'une élimination itérée de stratégies dominées, nous ne pouvons pas nous servir de cet outil pour analyser un jeu de manière fiable.

Exemple 6. Considérons la matrice de gain suivante :

	G	D
H	1, 1	0, 0
M	1, 1	2, 1
B	0, 0	2, 1

Pour le joueur j_1 , deux de ses stratégies sont faiblement dominées par la troisième, M. Si nous éliminons la stratégie H en premier, on obtient la situation

	G	D
H	1, 1	0, 0
M	1, 1	2, 1
B	0, 0	2, 1

pour laquelle la stratégie G devient faiblement dominée. Or, si nous avons éliminé la stratégie B en premier, nous serions dans la situation

	G	D
H	1, 1	0, 0
M	1, 1	2, 1
B	0, 0	2, 1

pour laquelle la stratégie D est faiblement dominée.

※ Équilibres de Nash

2.1 Équilibres de Nash : premières définitions

La notion d'*équilibre de Nash* s'intéresse principalement à la stabilité d'une situation étudiée, plutôt qu'à la maximisation de l'utilité, ou d'un gain, d'un certain joueur. Comme avec les équilibres en stratégies dominantes et strictement dominantes, un équilibre de Nash est un profil de stratégies, c'est-à-dire un n -uplet de stratégies, où à chaque joueur correspond une unique stratégie.

Ainsi, pour savoir si nous sommes, ou non, dans une situation décrite par un équilibre de Nash, il nous faut connaître la stratégie de chacun des joueurs, et leur fonction d'utilité. Dans un équilibre de Nash, aucun joueur n'a envie de changer sa stratégie si personne d'autre ne décide d'en changer. Dans ce sens, cela fait référence à une certaine idée de la stabilité de la situation dans laquelle les joueurs sont, qu'elle leur soit profitable ou non.

Définition 2.1. Un profil de stratégies $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ est un *équilibre de Nash* si pour tout joueur $i \in N$, et pour tout $t_i \in S_i$, on a

$$g_i(s_i, s_{-i}) \geq g_i(t_i, s_{-i}).$$

On note $NE(\Gamma)$ l'ensemble des équilibres de Nash du jeu Γ .

La notion d'équilibre de Nash est liée à la notion de *meilleure réponse*. Étant donné un profil partiel $s_{-i} \in S_{-i}$, le joueur i doit choisir sa stratégie $s_i \in S_i$. On peut s'attendre de ce joueur qu'il choisisse une des meilleures réponses disponibles au contexte décrit par s_{-i} .

Definition 2.2. Une stratégie $s_i \in S_i$ est dite *meilleure réponse* à $s_{-i} \in S_{-i}$ si pour tout $t_i \in S_i$, on a

$$g_i(s_i, s_{-i}) \geq g_i(t_i, s_{-i}).$$

On note par $\text{Br}_i(s_{-i}) = \arg \max_{s_i \in S_i} g_i(s_i, s_{-i})$ l'ensemble des meilleures réponses à s_{-i} .

La notion de *meilleure réponse* est un concept aidant à l'analyse du jeu, mais non à la prise de décision. En effet, lors du précédent, nous avons émis l'hypothèse que les joueurs prenaient leur décision en même temps, ou au moins qu'ils ne sont pas au courant des choix des autres au moment de faire le leur. Ainsi, un joueur qui doit faire un choix ne connaît pas s_{-i} , et donc $\text{Br}(s_{-i})$.

Cependant, il s'agit d'un outil très utile pour l'étude mathématique des stratégies et des profils, en particulier pour l'existence de profils avec certaines propriétés comme les équilibres de Nash.

Proposition 2.3. Un profil de stratégies $s \in S$ est un équilibre de Nash si et seulement si, pour tout joueur $i \in N$, on a $s_i \in \text{Br}(s_{-i})$.

Exemple 7. Reprenons l'Exemple 2 "Jeu de coordination" du premier cours, où la matrice de gain était

	C	T
C	2, 1	0, 0
T	0, 0	1, 2

Analysons exhaustivement la situation. Nous avons quatre profils possibles : (C, C) , (C, T) , (T, C) et (T, T) . On voit aisément que (C, T) et (T, C) ne peuvent pas être des équilibres de Nash, car chacun des joueurs souhaite rejoindre l'autre. Regardons maintenant le profil (C, C) . Le jeu étant symétrique, la situation est la même que pour le profil (T, T) . Prenons le premier joueur, qui obtient un gain de 2 sur le profil (C, C) . Sa seule autre stratégie alternative serait d'aller au théâtre, ce qui modifierait son paiement à 0. Pour le joueur 2, même si son paiement est moindre sur (C, C) , n'a tout de même pas envie d'aller au théâtre tout seul (rappelons que l'équilibre de Nash prend seulement en compte les déviations unilatérales). On a alors que (C, C) et (T, T) sont tous deux des équilibres de Nash.

Exemple 8. Reprenons à présent l'Exemple 3 "Tir de pénalty". La matrice de paiement est donnée par

	<i>G</i>	<i>D</i>
<i>G</i>	1, -1	-1, 1
<i>D</i>	-1, 1	1, -1

On voit clairement dans les règles du jeu qu'il n'y a pas d'équilibre de Nash dans ce jeu, le tireur souhaitant tirer là où il n'y a pas le gardien, le gardien voulant se placer là où le joueur tire.

Exemple 9. Nous allons voir à présent que l'équilibre de Nash peut représenter une situation très inconfortable pour chacun des joueurs. La matrice de paiement du dilemme du prisonnier présenté à l'Exemple 4 des notes du premier cours est la suivante :

	<i>T</i>	<i>S</i>
<i>T</i>	-3, -3	0, -4
<i>S</i>	-4, 0	-1, -1

Le profil (T, T) est un équilibre de Nash. En effet, si chacun sait que l'autre va trahir, aucun n'a envie de se taire. Il s'agit également du seul équilibre de Nash.

Nous avons vu dans les trois exemples précédents qu'un jeu peut avoir aucun, un unique, ou plusieurs équilibres de Nash. Comme pour les équilibres en stratégies dominées, on a des équilibres de Nash stricts ou non.

Exemple 10. Considérons le jeu sous forme simple suivant :

	<i>G</i>	<i>D</i>
<i>H</i>	2, 2	1, 1
<i>B</i>	1, 1	1, 1

Il y a deux équilibres de Nash : (H, G) et (B, D) . Cependant, ces deux profils ne font pas preuve de la même stabilité. En effet, sur le profil (B, D) , les deux joueurs sont complètement indifférents entre la stratégie qu'ils sont en train de jouer, et leur stratégie alternative, ce qui rend le profil (B, D) relativement peu stable. Au contraire, sur le profil (H, G) , personne n'a envie de dévier, car cela revient à diviser son gain par deux. On peut donc supposer qu'une déviation de (H, G) est bien moins probable qu'une déviation de (B, D) , même si aucune déviation n'est réellement attendue, comme ce sont tous les deux des équilibres de Nash.

Nous avons maintenant vu deux types d'équilibres, les équilibres en stratégies dominantes et les équilibres de Nash. Les équilibres en stratégies dominantes sont plus forts que les équilibres de Nash, car le choix d'une stratégie dépend uniquement des stratégies disponibles pour le joueur, et non des stratégies choisies par les autres joueurs, donc du profil entier.

Un équilibre en stratégies dominantes a un pouvoir prédictif plus important qu'un équilibre de Nash, car il ne contient que des stratégies que les joueurs ont intérêt à jouer dans tous l'ensemble des cas possibles. Un équilibre de Nash, en particulier quand plusieurs existent, n'a pas réellement de pouvoir prédictif, et caractérise simplement la stabilité d'une situation donnée. De plus, nous avons les résultats suivants.

Proposition 2.4.

1. L'équilibre en stratégies strictement dominantes est l'unique équilibre de Nash ;
2. L'ensemble des équilibres de Nash est inchangé par élimination itérée de stratégies strictement dominées ;
3. Si un jeu est résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées, alors le profil obtenu est l'unique équilibre de Nash du jeu.

Proposition 2.5.

1. Un équilibre en stratégies dominantes est un équilibre de Nash ;
2. La suite des ensembles des équilibres de Nash obtenue par élimination itérée de stratégies faiblement dominées est décroissante.

2.2 Stratégies mixtes

On commence cette section par un exemple bien connu.

Exemple 11 (Pierre, Feuille, Ciseau). La matrice de paiement du jeu est la suivante :

	<i>P</i>	<i>F</i>	<i>C</i>
<i>P</i>	0, 0	-1, 1	1, -1
<i>F</i>	1, -1	0, 0	-1, 1
<i>C</i>	-1, 1	1, -1	0, 0

On réalise assez vite que ce jeu ne contient équilibre de Nash. Cependant, si les joueurs sont autorisés à jouer des *stratégies mixtes*, c'est-à-dire, des distributions de probabilités de stratégies pures, alors il existe un équilibre de Nash. Cet équilibre est donné par le profil composé pour chaque joueur de la stratégie suivante : on joue P avec une probabilité $\frac{1}{3}$, on joue F avec une probabilité $\frac{1}{3}$, et enfin, on joue C avec une probabilité $\frac{1}{3}$. En effet, si un joueur joue autre chose, il favorise au moins une des trois actions, ou en délaisse une, ce qui donne un avantage certain à son adversaire, et comme il s'agit d'un jeu à somme nulle, où le gain d'un joueur est la perte de l'autre, le fait de dévier de la stratégie explicitée au-dessus décroît nécessairement son gain.

On appelle *jeu fini* un jeu sous forme normale avec un nombre fini de joueurs tel que chaque ensemble de stratégie est fini. Pour un ensemble de stratégies fini S_i , on dénote par $\Delta(S_i)$ l'ensemble des probabilités sur S_i , c'est-à-dire

$$\Delta(S_i) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{S_i} \mid \sum_{s \in S_i} x_s = 1 \text{ et } x_s \geq 0, \forall s \in S_i \right\}.$$

Un élément de $\Delta(S_i)$ est appelé une *stratégie mixte*. Un élément de S_i est appelée une *stratégie pure*. On simplifie les notations en posant :

$$\Sigma_i = \Delta(S_i), \quad \Sigma_{-i} = \bigtimes_{j \in N \setminus \{i\}} \Sigma_j \quad \text{et} \quad \Sigma = \bigtimes_{i \in N} \Sigma_i = \bigtimes_{i \in N} \Delta(S_i).$$

Definition 2.6. L'*extension mixte* du jeu fini $\Gamma = (N, S, g)$ est le jeu $\Gamma^\Delta = (N, \Sigma, g)$. La fonction de paiement g est étendue multilinéairement : pour tout profil $\sigma \in \Sigma$, le paiement du joueur $i \in N$ est donné par

$$g_i(\sigma) = \mathbb{E}_\sigma[g] = \sum_{s \in S} \left(\prod_{j \in N} \sigma_j(s_j) \right) g_i(s).$$

Exemple 12. Étudions l'extension mixte du "Tir de penalty". La matrice de gain est

	G	D
G	$1, -1$	$-1, 1$
D	$-1, 1$	$1, -1$

Considérons un profil mixte $\sigma \in \Delta(\{G, D\})^2$. Le gain du gardien est

$$\begin{aligned} g_1(\sigma) &= \sigma_1(G)\sigma_2(G)g_1(G, G) + \sigma_1(D)\sigma_2(D)g_1(D, D) \\ &\quad + \sigma_1(G)\sigma_2(D)g_1(G, D) + \sigma_1(D)\sigma_2(G)g_1(D, G) \\ &= \sigma_1(G)\sigma_2(G) + \sigma_1(D)\sigma_2(D) - (\sigma_1(G)\sigma_2(D) + \sigma_1(D)\sigma_2(G)). \end{aligned}$$

Le premier terme de la somme correspond à la probabilité d'être dans une situation où le tireur et le gardien choisissent le même côté, et le second terme correspond à la probabilité de choisir des côtés différents.

Nous avons vu précédemment que le jeu du tir de pénalty n'a pas d'équilibre de Nash en stratégie pure. Est-ce toujours le cas en stratégie mixte ?

2.3 Équilibres de Nash en stratégies mixtes

Définition 2.7. Un équilibre de Nash en stratégies mixtes du jeu Γ est un équilibre de Nash de son extension mixte Γ^Δ .

Pour tout $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$, l'ensemble des meilleures réponses $\text{Br}(\sigma_{-i})$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble des meilleures réponses pures. On constate que grâce à la linéarité de g_i par rapport à σ_i , le paiement maximum est le même que l'on maximise parmi les stratégies mixtes ou parmi les stratégies pures du joueur i :

$$\max_{t_i \in S_i} g_i(t_i, \sigma_{-i}) = \max_{\tau_i \in \Sigma_i} g_i(\tau_i, \sigma_{-i}).$$

On a alors en particulier qu'un équilibre de Nash en stratégies pures est un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Nous avons maintenant tous les éléments pour présenter le résultat le plus important de cette séance.

Théorème 2.8 (Nash, 1950). Tout jeu fini admet un équilibre de Nash en stratégie mixte.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du résultat suivant.

Théorème 2.9 (Kakutani, 1941). Soit C un convexe compact non-vidé d'un espace euclidien de dimension finie. Soit $\phi : C \rightarrow 2^C$ une fonction hémicontinue supérieurement sur C telle que $\phi(x)$ est non-vidé, fermé et convexe pour tout $x \in C$. Alors ϕ a un point fixe.

Preuve. L'idée est d'appliquer le théorème du point fixe de Kakutani sur la correspondance de meilleure réponse. On définit $\text{Br} : \Sigma \rightarrow 2^\Sigma$ la correspondance de meilleure réponse, définie par

$$\text{Br}(\sigma) = \bigcap_{i \in N} \text{Br}_i(\sigma_{-i}).$$

On vérifie maintenant les hypothèses du théorème de Kakutani.

Premièrement, le domaine de la correspondance de meilleure réponse est l'ensemble des profils de stratégies mixtes Σ . Cet ensemble est de dimension finie car le nombre de joueur et de stratégies pures par joueur est fini. Il est compact et convexe car il est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points (les profils de stratégies pures).

Nous avons vu plus tôt que l'ensemble des meilleures réponses $\text{Br}_i(\sigma_{-i})$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble des meilleures réponses pures. Comme g est multilinéaire sur un espace euclidien de dimension finie, elle est continue, et grâce au théorème de Weierstrass l'ensemble des meilleures réponses est non-vidé. Donc pour tout $\sigma \in \Sigma$, on a $\text{Br}(\sigma)$ non-vidé, convexe et fermé.

Il reste à montrer que Br est hémicontinue supérieurement. Pour cela, nous utilisons le théorème du maximum de Berge.

Théorème 2.10 (Berge, 1959). Soient X et Θ deux espaces topologiques, $f : X \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\phi : \Theta \rightarrow 2^X$ une correspondance à valeurs compactes telle que $\phi(\theta)$ soit non-vidé pour tout $\theta \in \Theta$. On définit la *fonction marginale* $f^* : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f^*(\theta) := \sup_{x \in \phi(\theta)} f(x, \theta)$$

et l'ensemble des maximiseurs $\phi^* : \Theta \rightarrow 2^X$ par

$$\phi^*(\theta) := \operatorname{argmax}_{x \in \phi(\theta)} f(x, \theta).$$

Si ϕ est continue en θ , alors la fonction marginale f^* est continue, et l'ensemble des maximiseurs ϕ^* est hémicontinue supérieurement à valeurs compactes et non-vides.

Dans notre cas, ϕ est simplement la fonction qui associe à chaque σ_{-i} l'ensemble des stratégies Σ_i du joueur $i \in N$, et f est la fonction de paiement $g_i : \Sigma_i \times \Sigma_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction ϕ étant constante, elle est continue. Chaque ensemble de stratégies mixtes étant compact par finitude du jeu et trivialement non-vidé, on a que ϕ est une correspondance à valeurs compactes. Enfin, f est continue car multilinéaire sur un espace de dimension finie.

Donc le théorème de Berge s'applique, et $\phi^* = \text{Br}$ est hémicontinue supérieurement. Enfin, le théorème de Kakutani s'applique à son tour, impliquant l'existence d'un point fixe pour la correspondance de meilleure réponse Br , qui est nécessairement un équilibre de Nash, grâce à la Proposition 2.3. $\square$

Cette preuve met en avant l'aspect circulaire des prévisions que chacun des joueurs fait en fonction de ce qu'il pense que les autres joueurs vont faire, qui eux-mêmes essaient d'anticiper ce que tous les autres vont faire, etc. Ainsi, un point fixe de la fonction de meilleure réponse a une certaine forme de stabilité quant aux souhaits de déviations des joueurs.

2.4 Identification des équilibres de Nash

Comme l'extension mixte d'un jeu sous forme normale est elle-même un jeu sous forme normale, les notions de dominations s'étend naturellement aux stratégies mixtes.

Proposition 2.11. Une stratégie $\sigma_i \in \Sigma_i$ est strictement dominée par $\tau_i \in \Sigma_i$ si et seulement si pour tout $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$, on a

$$g_i(\tau_i, \sigma_{-i}) > g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

On peut également continuer à analyser les jeux en utilisant l'élimination itérée de stratégies pures strictement dominées par des stratégies mixtes. L'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes est inchangé par élimination de stratégies strictement dominées, c'est-à-dire qu'aucune stratégie strictement dominée ne fait partie du support d'un équilibre de Nash.

Exemple 13. Dans le jeu représenté par la matrice de gain suivante :

	<i>H</i>	<i>M</i>	<i>B</i>
<i>G</i>	1, 1	0, 2	0, 4
<i>C</i>	0, 2	5, 0	1, 6
<i>D</i>	0, 2	1, 1	2, 1

La stratégie mixte pour le second joueur $\sigma_2 = \frac{1}{2}G + \frac{1}{2}D$, donne les potentiels paiements

$$g_2(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 4 \\ 1.5 \end{pmatrix},$$

alors que la stratégie pure $\sigma'_2 = M$ donne

$$g_2(\sigma'_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La stratégie σ'_2 est donc strictement dominée, et peut être sereinement ignorée lors de la recherche des équilibres de Nash du jeu, réduisant la dimension de l'ensemble des stratégies mixtes du second joueur.

Nous avons également les résultats suivants.

Proposition 2.12. Un profil $\sigma \in \Sigma$ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si et seulement si pour tout joueur $i \in N$, les assertions suivantes sont vérifiées :

- ▷ pour toute paire $(s_i, s'_i) \in S_i^2$, si $\sigma_i(s_i) > 0$ et $\sigma_i(s'_i) > 0$, alors

$$g_i(s_i, \sigma_{-i}) = g_i(s'_i, \sigma_{-i});$$

- ▷ pour toute stratégie pure $s_i \in S_i$, si $\sigma_i(s_i) = 0$, alors $g_i(s_i, \sigma_{-i}) \leq g_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$.

Ces résultats donnent une première approche pour identifier les équilibres de Nash :

1. Essayer tous les supports possibles, c'est-à-dire, $\{s_i \in S_i \mid \sigma_i(s_i) > 0\}$;
2. Trouver les probabilités qui rendent chaque joueur indifférent sur son support ;
3. Vérifier que les stratégies hors du support ne donnent pas un meilleur paiement.

Exemple 14. Trouvons tous les équilibres de Nash du jeu de coordination suivant :

	<i>D</i>	<i>G</i>
<i>H</i>	1, 1	0, 0
<i>B</i>	0, 0	1, 1

1. Premièrement, on vérifie s'il n'y a pas d'équilibres en stratégies dominantes. Dans ce jeu, aucune stratégie pure est strictement dominante ou strictement dominée, même par des stratégies mixtes ;
2. Ensuite, on cherche les équilibres de Nash en stratégies pures : il y en a deux, (H, D) et (B, G) .
3. On étudie maintenant les stratégies mixtes. Notons par $x \in [0, 1]$ la probabilité de jouer H pour le joueur 1, et par $y \in [0, 1]$ la probabilité de jouer D pour le joueur 2. Le jeu étant symétrique, on peut adopter le point du joueur 1. Pour avoir une stratégie non-pure, on suppose $x \in]0, 1[$. Si le joueur 1 est indifférent entre ses deux stratégies pures, alors on a $g_1(H, y) = g_1(B, y)$, donc $y = 1 - y$, ce qui implique $y = \frac{1}{2}$. On a alors $x = \frac{1}{2}$.

L'ensemble des équilibres de Nash est alors $\{(H, D), (B, G), (\frac{1}{2}(H + B), \frac{1}{2}(D + G))\}$.

※ Jeux à deux joueurs à somme nulle

3.1 Premières définitions

Dans ce cours, nous allons étudier une classe de jeux pour laquelle l'équilibre de Nash a une grande importance. Nous avons fréquemment rencontré des exemples de jeux symétriques lors des deux cours précédents, c'est-à-dire des jeux pour lesquels les fonctions de paiements sont les mêmes pour chaque joueur. Ici, nous sommes intéressés par des jeux que nous pouvons considérer comme antisymétriques.

Définition 3.1. Un jeu à deux joueurs à somme nulle est un jeu sous forme normale $\Gamma = (N, S, g)$ tel que $|N| = 2$ et $g_1 = -g_2$.

Dans un jeu à deux joueurs à somme nulle, les intérêts des deux joueurs sont diamétralement opposés : ce que l'un gagne, l'autre le perd. De plus, les données d'un jeu à deux joueurs à somme nulle sont plus compactes : le jeu est complètement déterminé par la donnée de l'ensemble de stratégie du premier joueur S , l'ensemble de stratégies du second joueur T et de la fonction de paiement du premier joueur $g : S \times T \rightarrow \mathbb{R}$. Le premier joueur va alors chercher à maximiser la fonction de paiement g , tandis que le second joueur va chercher à la minimiser.

Exemple 15. Reprenons encore une fois l'exemple du "Tir de penalty", donné par

	G	D
G	1, -1	-1, 1
D	-1, 1	1, -1

On remarque que dans chaque cellule, la somme des gains est bien égale à 0. Ainsi, il suffit simplement de connaître le paiement du premier joueur pour chaque profil. On peut alors représenter le jeu de la manière suivante :

	G	D
G	1	-1
D	-1	1

Les deux joueurs s'affrontant frontalement, l'analyse des équilibres y est légèrement simplifiée, dû à la corrélation des deux fonctions de paiements.

Definition 3.2. Le *supinf* du jeu Γ , noté $\underline{v}(\Gamma)$ (ou simplement $\underline{v}$), est la quantité

$$\underline{v} := \sup_{s \in S} \inf_{t \in T} g(s, t).$$

Lorsque le sup et l'inf sont atteints, on parle également de *maxmin*.

De manière générale, pas abus de langage, on parle de *maxmin* même lorsque le sup ou l'inf ne sont pas atteint. Le maxmin d'un jeu représente la quantité que le joueur j_1 peut s'assurer peu importe ce que le joueur j_2 fait.

Proposition 3.3. Le maxmin $\underline{v}$ est caractérisé par

- ▷ Le joueur j_1 *garantit* $\underline{v}$ à ε près, c'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une stratégie $s \in S$ pour le premier joueur telle que, pour toute stratégie du second joueur $t \in T$, on a $g(s, t) \geq \underline{v} - \varepsilon$;
- ▷ Le joueur j_2 *défend* $\underline{v}$ à ε près, c'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute stratégie $s \in S$ du premier joueur, il existe une stratégie pour le second joueur $t \in T$ telle que $g(s, t) \leq \underline{v} + \varepsilon$.

Posons $f = \inf_{t \in T} g(\cdot, t)$ une fonction définie sur l'ensemble de stratégie S du joueur j_1 . La fonction f peut être interprétée comme une fonction de meilleure réponse pour le joueur j_2 , qui prend en entrée une stratégie $s \in S$ et retourne la valeur minimale de g possible pour ce choix de stratégie. Dans cette situation, le joueur j_2 a un avantage important, car il sait ce que le joueur j_1 joue, et choisit sa stratégie en fonction. On a alors $\underline{v} = \sup_{s \in S} f(s)$, et le maxmin du jeu représente la valeur que le joueur j_1 peut obtenir dans le cas où le joueur j_2 joue nécessairement la meilleure réponse.

Il s'agit d'un calcul *prudent*, ce nombre étant déterminé dans le pire cas pour le joueur j_1 , afin de déterminer une borne sous laquelle son paiement ne doit rationnellement pas se trouver. C'est ce comportement que nous retrouvons dans la proposition ci-dessus.

Il existe ce même calcul prudent pour donner une borne inférieure au paiement du joueur j_2 , appelé le *minmax*, noté $\bar{v}$ et défini par

$$\bar{v} := \inf_{t \in T} \sup_{s \in S} g(s, t).$$

Il s'agit de la même idée, mais cette fois-ci les rôles des joueurs j_1 et j_2 sont inversés.

Exemple 16. Dans l'exemple du "Tir de penalty", le maxmin du jeu est -1 , car l'adversaire connaît notre stratégie. À l'inverse, le minmax est 1 , car nous sommes capable de jouer là où l'adversaire ne se trouve pas.

Proposition 3.4. Pour tout jeu, on a $\underline{v} \leq \bar{v}$.

La différence $\bar{v} - \underline{v} \geq 0$ entre le minmax et le maxmin est appelé le *saut de dualité*.

Definition 3.5. Si $\bar{v} - \underline{v} = 0$, le jeu a une *valeur* (en stratégies pures), notée $v = \underline{v} = \bar{v}$.

Lorsqu'un jeu admet une valeur, il s'agit du seul paiement auquel on peut s'attendre si les joueurs jouent de manière optimale.

Exemple 17. Le jeu représenté par la matrice de gain suivante

	<i>G</i>	<i>D</i>
<i>G</i>	1	-1
<i>D</i>	1	1

a une valeur $v = 1$. En effet, même le maxmin, qui est censé être à l'avantage du joueur j_2 n'est pas négatif, car la stratégie D du joueur j_1 lui assurera toujours 1.

On s'intéresse à présent aux stratégies atteignant cette valeur.

3.2 Stratégies optimales

Definition 3.6. Considérons un jeu Γ admettant une valeur v . Soit $\varepsilon > 0$.

- ▶ Une stratégie $s \in S$ est ε -optimale pour j_1 si elle lui garantit $v - \varepsilon$, c'est-à-dire, si pour toute stratégie adverse $t \in T$, on a $g(s, t) \geq v - \varepsilon$;
- ▶ Une stratégie $t \in T$ est ε -optimale pour j_2 si elle lui garantit $v + \varepsilon$, c'est-à-dire, si pour toute stratégie adverse $s \in S$, on a $g(s, t) \leq v + \varepsilon$.

Les stratégies 0-optimales sont simplement dites *optimales*.

Definition 3.7. Le profil (s^*, t^*) est un *point-selle* si pour tout profil (s, t) , on a

$$g(s, t^*) \leq g(s^*, t^*) \leq g(s^*, t).$$

On voit que chaque déviation unilatérale d'un point-selle réduit le paiement du joueur qui dévie, ainsi c'est un équilibre de Nash.

Proposition 3.8. S'il existe un équilibre de Nash en stratégies pures (s^*, t^*) , alors le jeu a une valeur $g(s^*, t^*)$. De plus, s^* et t^* sont des stratégies optimales. Réciproquement, si un jeu a une valeur v et des stratégies optimales (s^*, t^*) , alors (s^*, t^*) est un équilibre de Nash et $v = g(s^*, t^*)$.

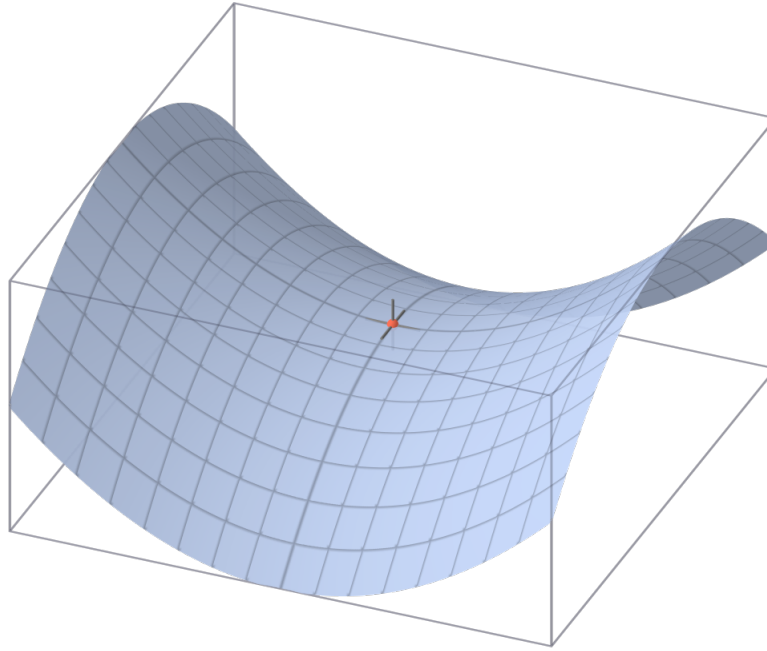


FIGURE 4 – Un point selle est un point critique qui n'est pas un optimum.

Cette proposition donne une caractérisation des équilibres de Nash en stratégies pures grâce à des propriétés seulement unilatérales des stratégies qui les composent. Au lieu de devoir chercher des profils pour lesquels chacune des stratégies est une meilleure réponse au profil partiel correspondant, il suffit, dans les jeux à deux joueurs à somme nulle, de trouver des stratégies optimales.

Bien que les stratégies optimales ressemblent aux stratégies dominantes, il peut exister des stratégies optimales qui ne sont pas des stratégies dominantes.

On s'intéresse maintenant aux propriétés de l'opérateur "valeur", que l'on peut voir comme une fonction définie sur l'espace des jeux.

Proposition 3.9. Soient $c \in \mathbb{R}$ un réel, $\Gamma = (S, T, g)$ et $\Gamma' = (S, T, g')$ deux jeux définis sur les mêmes ensembles de stratégies, et $\Gamma'' = (S, T, g + c)$ étant défini comme Γ , mais en translatant chaque paiement par c . Alors on a

- ▷ *monotonie*: si $g \leq g'$, alors $\underline{v}(\Gamma) \leq \underline{v}(\Gamma')$;
- ▷ *translation des constantes*: on a $\underline{v}(\Gamma'') = \underline{v}(\Gamma) + c$;
- ▷ *contraction*: on a $|\underline{v}(\Gamma) - \underline{v}(\Gamma')| \leq \|g - g'\|_\infty$.

La dernière propriété découle des deux précédentes. En effet, on a nécessairement

$$g \leq g' + \|g - g'\|_\infty,$$

on peut alors appliquer l'opérateur maxmin de chaque côté de l'inégalité par monotonie, et enfin la translation des constantes.

La proposition ci-dessus s'applique de la même manière à l'opérateur minmax, et à l'opérateur valeur si celui-ci est bien défini.

On rappelle les définitions de stratégies strictement dominées et faiblement dominées. Une stratégie $s' \in S$ est *strictement dominée* par $s \in S$ si pour toute stratégie $t \in T$, on a $g(s', t) < g(s, t)$. Une stratégie $s' \in S$ est *faiblement dominée* par $s \in S$ si pour toute stratégie $t \in T$ on a $g(s', t) \leq g(s, t)$ et il existe une stratégie $t' \in T$ telle que $g(s', t') < g(s, t')$.

Proposition 3.10. Soient $\Gamma = (S, T, g)$ un jeu à deux joueurs à somme nulle, $s' \in S$ une stratégie faiblement dominée et $\Gamma' = (S \setminus \{s'\}, T, g)$. Alors $\underline{v}(\Gamma) = \underline{v}(\Gamma')$ et $\overline{v}(\Gamma) = \overline{v}(\Gamma')$. De plus, si s' est strictement dominée et que le maxmin est atteint, alors s' n'est pas une stratégie optimale dans Γ .

Ce résultat ressemble aux résultats du cours précédent à propos des équilibres de Nash et de l'élimination itérée de stratégies dominées. En effet, il affirme que, lorsque l'on cherche la valeur d'un jeu, on peut ignorer les stratégies faiblement dominées, et lorsque l'on cherche les stratégies optimales, on peut ignorer les stratégies strictement dominées.

Exemple 18. Par éliminations itérées des stratégies strictement dominées, donnons la valeur et les stratégies optimales du jeu suivant :

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	0	3	3	9
s_2	6	1	4	0
s_3	7	5	6	8
s_4	8	4	1	9

On obtient alors la succession :

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	0	3	3	9
s_2	6	1	4	0
s_3	7	5	6	8
s_4	8	4	1	9

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	0	3	3	9
s_2	6	1	4	0
s_3	7	5	6	8
s_4	8	4	1	9

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	0	3	3	9
s_2	6	1	4	0
s_3	7	5	6	8
s_4	8	4	1	9

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	0	3	3	9
s_2	6	1	4	0
s_3	7	5	6	8
s_4	8	4	1	9

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	0	3	3	9
s_2	6	1	4	0
s_3	7	5	6	8
s_4	8	4	1	9

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	0	3	3	9
s_2	6	1	4	0
s_3	7	5	6	8
s_4	8	4	1	9

3.3 Valeurs en stratégies mixtes

Dans la suite de ce cours, on considère que les deux ensembles de stratégies S et T sont finis. On rappelle que les ensembles de stratégies mixtes sont donnés par

$$\Delta(S) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{|S|} \mid \sum_{i \in S} x_i = 1 \right\}, \quad \text{et} \quad \Delta(T) = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^{|T|} \mid \sum_{i \in T} y_i = 1 \right\}.$$

La fonction de paiement g est étendue multilinéairement, par

$$\begin{aligned} g : \Delta(S) \times \Delta(T) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\sigma, \tau) &\longmapsto g(\sigma, \tau) := \mathbb{E}_{\sigma, \tau}[g] = \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \sigma(s) \tau(t) g(s, t). \end{aligned}$$

Comme les ensembles de stratégies S et T sont finis, on peut représenter la fonction de paiement par une matrice

$$A = [g(s, t)]_{(s, t) \in S \times T}.$$

Ainsi, pour chaque profil de stratégies mixtes (σ, τ) , le gain est donné par

$$g(\sigma, \tau) = \sigma^\top A \tau.$$

Exemple 19. Soient $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ une stratégie mixte pour le gardien et $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ une stratégie mixte pour le tireur dans le jeu "Tir de penalty". Le gain du gardien est donné par

$$\sigma^\top A \tau = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 - \tau_2 \\ \tau_2 - \tau_1 \end{pmatrix} = \sigma_1 (\tau_1 - \tau_2) + \sigma_2 (\tau_2 - \tau_1)$$

Pour la théorie générale des jeux finis sous forme normale, prendre l'extension mixte d'un jeu impliquait l'existence d'au moins un équilibre de Nash. On a un résultat similaire dans la théorie des jeux à deux joueurs à somme nulle.

Théorème 3.11 (du minmax, von Neumann (1928)). Soit A une matrice réelle de taille $|S| \times |T|$. Il existe $(\sigma^*, \tau^*, v) \in \Delta(S) \times \Delta(T) \times \mathbb{R}$ tel que, pour tout profil (σ, τ) , on a

$$\sigma^\top A \tau^* \leq v \leq (\sigma^*)^\top A \tau.$$

L'extension mixte du jeu matriciel a une valeur et les joueurs ont des stratégies optimales. Le réel v est unique, c'est la *valeur* (en stratégies mixtes) de la matrice A :

$$v = \max_{\sigma \in \Delta(S)} \min_{\tau \in \Delta(T)} \sigma^\top A \tau = \min_{\tau \in \Delta(T)} \max_{\sigma \in \Delta(S)} \sigma^\top A \tau.$$

Ce résultat est généralement considéré comme le point de départ de la théorie des jeux moderne. Il a été généralisé plus de 20 ans plus tard, par Nash.

En stratégies pures, le maxmin $\underline{v}$ donne une borne inférieure quant au paiement attendu par le joueur j_1 , et le minmax $\bar{v}$ donne une borne supérieure. Il est alors peu surprenant de voir que la valeur d'un jeu en stratégies mixtes est comprise entre le maxmin et la minmax, c'est-à-dire,

$$\underline{v}(\Gamma) \leq v(\Gamma^\Delta) \leq \bar{v}(\Gamma).$$

On a également le résultat suivant.

Lemme 3.12. Le joueur qui joue en second peut jouer en stratégies pures, c'est-à-dire,

$$\min_{\tau \in \Delta(T)} \max_{\sigma \in \Delta(S)} g(\sigma, \tau) = \min_{\tau \in \Delta(T)} \max_{s \in S} g(s, \tau).$$

Cette propriété est due au fait que la fonction de paiement g est étendu multilinéairement aux stratégies mixtes. De façon similaire, on a le résultat suivant.

Proposition 3.13. Si (σ^*, τ^*) est un profil de stratégies optimales, et si $\sigma^*(s) > 0$, alors

$$g(s, \tau^*) = v.$$

Exemple 20. Considérons le jeu donné par la matrice

	G	D
H	3	-1
M	0	0
B	-2	1

La stratégie M du joueur j_1 est strictement dominée par la stratégie mixte $0.49H + 0.51B$, on l'élimine donc sans que cela change la valeur du jeu ainsi que les stratégies optimales. On a alors la matrice

	G	D
H	3	-1
B	-2	1

Soit (σ, τ) un profil de stratégies optimales. On voit que σ ne peut pas être une stratégie pure. Notons $\sigma = p_1H + (1 - p_1)B$ avec $p_1 \in (0, 1)$ et $\tau = p_2G + (1 - p_2)D$. Étudions les meilleures réponses du premier joueur en fonction de p_2 . On a

$$g(H, p_2) = 3p_2 - (1 - p_2) = 4p_2 - 1, \quad \text{et} \quad g(B, p_2) = -2p_2 + (1 - p_2) = 1 - 3p_2.$$

Le joueur j_1 est indifférent entre ses deux stratégies pures lorsque $g(H, p_2) = g(B, p_2)$, c'est-à-dire,

$$4p_2 - 1 = 1 - 3p_2 \iff p_2 = \frac{2}{7}.$$

On répète le même processus pour le second joueur. On a alors

$$g(p_1, G) = -3p_1 + 2(1 - p_1) = 2 - 5p_1, \quad \text{et} \quad g(p_1, D) = p_1 - (1 - p_1) = 2p_1 - 1.$$

Le joueur j_2 est indifférent entre ses deux stratégies pures lorsque $g(p_1, G) = g(p_1, D)$, c'est-à-dire,

$$2 - 5p_1 = 2p_1 - 1 \iff p_1 = \frac{3}{7}.$$

Ainsi, les stratégies optimales sont

$$\sigma = \frac{3}{7}H + \frac{4}{7}B, \quad \text{et} \quad \tau = \frac{2}{7}G + \frac{5}{7}D,$$

et la valeur est

$$g(\sigma, \tau) = \begin{pmatrix} 3/7 & 4/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 & 4/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/7 \\ 1/7 \end{pmatrix} = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}.$$

3.4 Lien avec la programmation linéaire

Considérons le maxmin d'un jeu matriciel en stratégies mixtes :

$$\max_{\sigma \in \Delta(S)} \min_{\tau \in \Delta(T)} \sigma^\top A \tau.$$

Grâce au Lemme 3.12, on peut réécrire ce problème comme

$$\max_{\sigma \in \Delta(S)} \min_{t \in T} [\sigma^\top A]_t,$$

où le fait de prendre la t -ième coordonnées du vecteur $\sigma^\top A$ correspond à prendre son produit scalaire avec le vecteur indicatrice de $t \in T$. On peut réécrire ce problème comme un programme linéaire :

$$\max_{\sigma \in \Delta(S)} z, \quad \text{tel que} \quad z \leq [\sigma^\top A]_t, \quad \forall t \in T,$$

que l'on réécrit à nouveau comme

$$\begin{aligned} & \max_{\sigma \in \mathbb{R}^{|S|}} z \\ \text{s.c.} & \begin{cases} z\mathbf{1} - \sigma^\top A \leq \mathbf{0}, \\ \sigma^\top \mathbf{1} = 1, \\ \sigma \geq \mathbf{0}. \end{cases} \end{aligned}$$

Le problème dual s'écrit

$$\begin{aligned} & \min_{\tau \in \mathbb{R}^{|T|}} w \\ \text{s.c.} & \begin{cases} \mathbf{1}w - A\tau \leq \mathbf{0}, \\ \mathbf{1}^\top \tau = 1, \\ \tau \geq \mathbf{0}, \end{cases} \end{aligned}$$

qui lui-même se réécrit comme un problème de minmax

$$\min_{\tau \in \Delta(T)} \max_{\sigma \in \Delta(S)} \sigma^\top A \tau.$$

La théorie des jeux à deux joueurs à somme nulle et la théorie de la programmation linéaire sont en réalité encore plus similaires qu'il n'y paraît sur cet exemple, car tout programme linéaire correspond également à un jeu à deux joueurs à somme nulle.

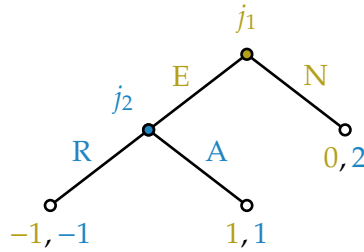
※ Jeux sous forme extensive

4.1 Premières définitions

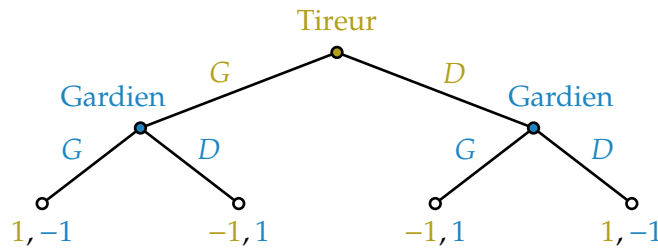
Depuis le début de ce cours, nous avons étudié les jeux sous forme normale, en stratégies pures ou mixtes, à somme nulle ou non. Dans chacun des cas, il n'était

peu fait mention de la quantité d'information que chaque joueur détient avant de choisir son action, ou même de l'ordre dans lequel les actions sont prises. Pour tenir compte de l'information disponible pour un joueur à un certain moment du jeu, il nous faut changer de description.

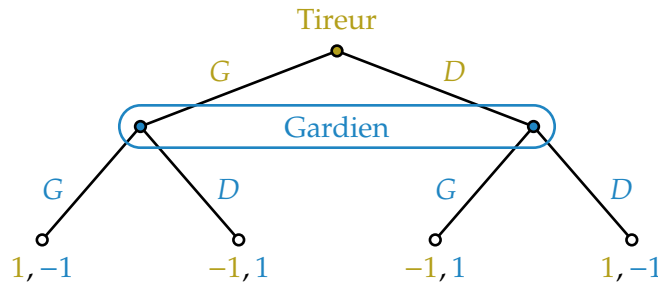
Exemple 21 (Jeu d'entrée). L'entreprise j_2 est en situation de monopole. L'entreprise j_1 peut choisir d'entrer (E) sur le marché ou non (N). Si j_1 entre, l'entreprise j_2 peut choisir de réagir (R) agressivement ou de s'y accommoder (A).



Exemple 22 (Matching pennies). Reprenons l'exemple du jeu "Tir de penalty". Maintenant, le tireur j_2 annonce où il va tirer. Le gardien j_1 peut donc s'adapter et choisir le bon côté. Le jeu se décrit de la manière suivante :



Considérons maintenant le cas habituel, où le gardien ne sait pas où le tireur va tirer. Dans ce cas, le gardien ne sait pas sur quel nœud de l'arbre il se trouve, c'est-à-dire, si le tireur a choisi gauche (G) ou droite (D). On représente cela de la façon suivante :



Chaque jeu sous forme extensive est défini sur un arbre dirigé.

Définition 4.1. Un *arbre dirigé enraciné* $\mathcal{A}$ est un triplet (Z, r, θ) où

- ▷ Z est un *ensemble fini de nœuds* ;
- ▷ $r \in Z$ est la *racine* ;
- ▷ $\theta : Z \setminus \{r\} \rightarrow Z$ est l'application prédécesseur.

On note par $Sc(z) = \theta^{-1}(z)$ l'ensemble des successeurs immédiats de z . L'ensemble des nœuds sans successeurs est noté T , et sont appelés les *nœuds terminaux*.

Definition 4.2. Un *jeu sous forme extensive* Γ est la donnée de

- ▷ un ensemble fini de *joueurs* N , plus un joueur j_0 appelé la *Nature* ;
- ▷ un arbre $\mathcal{A} = (Z, r, \theta)$;
- ▷ une partition de $Z \setminus T$ indiquant, pour chaque nœud, le joueur qui doit jouer. On note Z_i l'ensemble des nœuds sur lesquels le joueur $i \in N \cup \{0\}$ joue ;
- ▷ pour chaque nœud $z \in Z_0$, un vecteur de probabilité $D(z)$ sur $Sc(z)$;
- ▷ pour chaque Z_i , une partition en blocs appelés *ensembles d'information* ;
- ▷ une fonction de paiement $g : T \rightarrow \mathbb{R}^n$.

La définition formelle d'un jeu sous forme extensive peut paraître longue et complexe, mais peut s'interpréter très facilement de la manière suivante :

- ▷ chaque nœud de l'arbre représente un état possible et temporaire du jeu. Le fait que le graphe sous-jacent du jeu soit un arbre reflète la non-réversibilité du passage du temps ;
- ▷ à chaque état du jeu, il est nécessaire de décrire quel joueur doit jouer, ce qui est représenté par la partition $\{Z_i \mid i \in N \cup \{0\}\}$;
- ▷ enfin, lorsque le jeu est dans un état précis, le joueur j_i qui doit jouer peut ne pas avoir une information complète du passé. Ainsi, il ne sait pas nécessairement où exactement il se situe sur l'arbre. Cela est représenté par les ensembles d'information qui partitionnent Z_i : le joueur connaît simplement la classe d'équivalence dans laquelle il se trouve, mais pas le nœud exact.

Les ensembles d'information sont représentés par les contours entourant plusieurs nœuds du jeu, comme lors de l'exemple précédent. En particulier, si deux nœuds z_1 et z_2 se trouvent dans le même ensemble d'information, alors $Sc(z_1) \simeq Sc(z_2)$. Voici comment les jeux sous forme extensives sont joués :

1. notons i le joueur tel que $r \in Z_i$. Alors
 - (a) si $i = 0$, cela signifie que l'action est aléatoire, ainsi la position suivante est choisie en fonction de $D(r)$;
 - (b) sinon, j_i choisit un nœud parmi $Sc(r)$ qui devient le nœud actuel ;

2. le même processus se répète avec le nouveau sélectionné à l'étape précédente, tant que le nœud en cours n'est pas un nœud terminal ;
3. lorsqu'un des joueurs, ou la Nature, choisit un nœud terminal $z_* \in T$, le jeu s'arrête, et chaque joueur $i \in N$ reçoit un paiement égal à $g_i(z_*)$.

La suite de nœuds visités $(r, z_1, \dots, z_*)$ est appelée une *partie* du jeu.

Definition 4.3. Un jeu sous forme extensive est à *information parfaite* si tous les ensembles d'information sont des singletons.

Exemple 23. Le jeu d'échecs, de Go, le jeu d'entrée évoqué plus tôt, sont tous des jeux à information complète.

4.2 Stratégies et forme normale

La notion de stratégie dans les jeux sous forme extensive est relativement différente de celle des jeux sous forme normale, car elles doivent prendre en compte l'information disponible du joueur, ainsi que la position actuelle du jeu.

Definition 4.4. Une stratégie s_i de j_i associe à chaque ensemble d'information de Z_i un de ses successeurs. On note S_i l'ensemble des stratégies (pures) du joueur j_i .

On voit bien dans cette définition d'une stratégie pour un jeu sous forme extensive l'importance des ensembles d'information. Comme le joueur ne peut pas distinguer les nœuds qui les composent, sa réaction à chaque des nœuds d'un même ensemble d'information va être la même. Cependant, lorsque le joueur est capable de distinguer deux ensembles d'information distincts, il peut choisir deux réactions différentes.

L'ensemble de stratégie S_i de j_i est alors le produit cartésien de chacun des ensembles de nœuds qui sont successeurs directs de ses ensembles d'information. Si $u_1, \dots, u_p$ sont ses ensembles d'information, et pour chacun de ses ensembles, le nombre de successeurs est donné par $n_1, \dots, n_p$, alors le nombre de stratégies (pures) pour j_i est $n_1 \times \dots \times n_p$.

Definition 4.5. Un profil de stratégies pures $s \in S = \prod_{i \in N} S_i$ induit une partie, et donc un paiement. On note $g(s) \in \mathbb{R}^n$ l'espérance de paiement. On appelle *réduction sous forme normale* le triplet (N, S, g) .

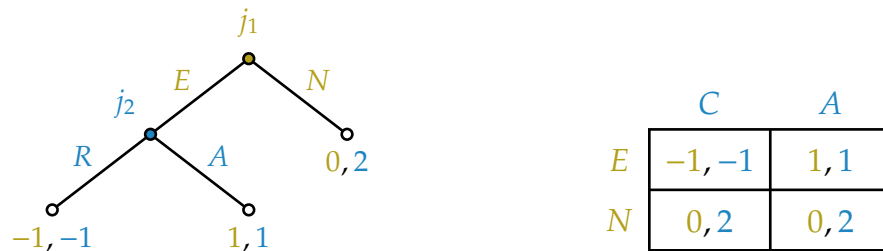
On remarquera que, même lorsque le profil est uniquement composé de stratégies pures, l'issue de ce jeu peut être aléatoire si $Z_0 \neq \emptyset$.

Comme on a défini un jeu sous forme normale, on peut définir des équilibres de Nash.

Definition 4.6. Un *équilibre de Nash*, en stratégies pures ou en stratégies mixtes, d'un jeu sous forme extensive est un équilibre de Nash de la forme normale associée.

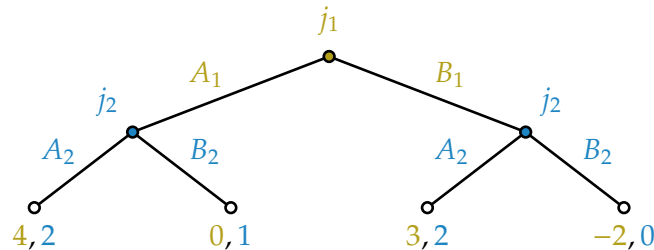
Ainsi, tout jeu sous forme extensive admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Exemple 24. La réduction sous forme normale du jeu d'entrée est donnée par



Il y a deux équilibres de Nash en stratégies pures: (E, A) et (N, C) . De plus, tout profil $(N, pC + (1-p)A)$ avec $p \geq 0.5$ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Exemple 25. Prenons le jeu à information complète suivant.

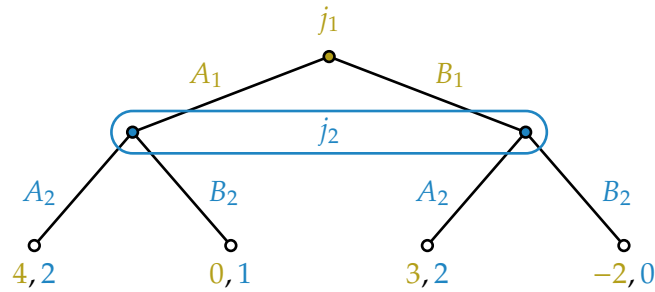


On a alors la réduction sous forme normale suivante.

	$A_2 A_2$	$A_2 B_2$	$B_2 A_2$	$B_2 B_2$
A_1	4, 2	4, 2	0, 1	0, 1
B_1	3, 2	-2, 0	3, 2	-2, 0

Considérons maintenant que les deux joueurs simultanément, c'est-à-dire que les deux nœuds intérieurs forment un unique ensemble d'information pour le

deuxième joueur :



La réduction sous forme normale prend une autre forme :

	A_2	B_2
A_1	4, 2	0, 1
B_1	3, 2	-2, 0

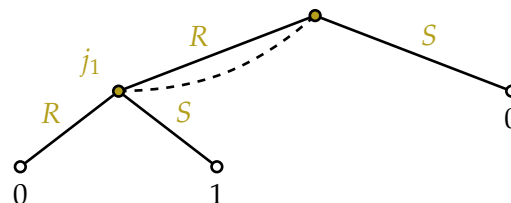
Il est possible mixer les stratégies autrement qu'à l'aide des stratégies mixtes.

Definition 4.7. Une *stratégie de comportement* du joueur j_i associe à chaque ensemble d'information une probabilité sur ses successeurs.

À la différence des stratégies mixtes qui sont des combinaisons convexes de stratégies pures, une stratégie de comportement est un ensemble de combinaisons convexes de réponses à un ensemble d'information particulier.

Comme avec les stratégies pures ou mixtes, un profil de stratégie de comportement induit une probabilité sur l'ensemble des nœuds terminaux, donc un paiement. Comment cela diffère des stratégies mixtes ?

Exemple 26 (Le conducteur distrait). Un conducteur doit rentrer chez lui en prenant la deuxième sortie d'autoroute. Lorsqu'il doit prendre la décision de sortir (S) ou de rester (R), il ne sait plus où il est.



Ici, le segment pointillé représente les ensembles d'information. Toute stratégie pure donne un paiement de 0, car soit il sort immédiatement, soit il ne sort jamais. Par linéarité, toute stratégie mixte donne également un paiement nul. La stratégie de comportement $\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}R$ à chaque nœud donne le paiement $\frac{1}{4}$.

Nous allons voir par la suite que cette différence entre les stratégies de comportement et les stratégies mixtes n'est pas si courante. On note par $h_i(z)$ la suite des ensembles d'information et des actions du joueur j_i avant d'arriver au nœud $z \in Z$, et par $u(z)$ l'ensemble d'information auquel z appartient.

Définition 4.8. Un jeu sous forme extensive est à *mémoire parfaite* si pour tout joueur j_i et pour tout $z, z' \in Z_i$ tels que $u(z) = u(z')$, on a $h_i(z) = h_i(z')$.

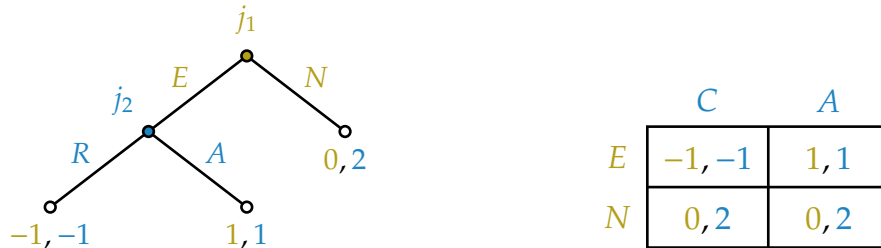
La condition de mémoire parfaite impose certaines conditions sur l'étendu du défaut de complétude de l'information dans le jeu. Lorsque celle-ci est respectée, les stratégies mixtes et de comportement sont équivalentes.

Définition 4.9. Deux stratégies σ_i et σ_i^* pures, mixtes ou de comportement sont *équivalentes* si pour tout profil partiel σ_{-i} pur, mixte, ou de comportement, les profils (σ_i, σ_{-i}) et $(\sigma_i^*, \sigma_{-i})$ donnent la même probabilité sur les nœuds terminaux.

Théorème 4.10 (Kuhn, 1953 & Isbell, 1957). Dans un jeu à mémoire parfaite, toute stratégie mixte admet une stratégie de comportement équivalente, et inversement.

4.3 Sous-jeux et équilibre parfait en sous-jeux

Exemple 27. Reprenons l'exemple du jeu d'entrée donné par



Nous avons vu plus tôt que (N, C) est un équilibre de Nash : le joueur j_2 menace le joueur j_1 de représailles s'il cherche à entrer sur le marché. Pourtant, si le joueur j_1 décide d'entrer tout de même sur le marché, la menace n'est plus crédible, car le joueur j_2 aurait plutôt intérêt à s'en accommoder.

Un raffinement de la notion d'équilibre de Nash est donc nécessaire.

Définition 4.11. Soit $z \in Z \setminus T$ et notons par $\Gamma[z]$ l'ensemble des nœuds composant le plus grand sous-arbre dont la racine est z . Si $z \in Z_0$ ou $u(z') \subseteq \Gamma[z]$ pour tout $z' \in \Gamma[z]$, alors le jeu sous forme extensive associé à ce sous-arbre est appelé *sous-jeu* partant de z .

Définition 4.12. Un profil de stratégies σ est un *équilibre parfait en sous-jeux* si la restriction de σ à chacun des sous-jeux est un équilibre de Nash pour ce sous-jeu.

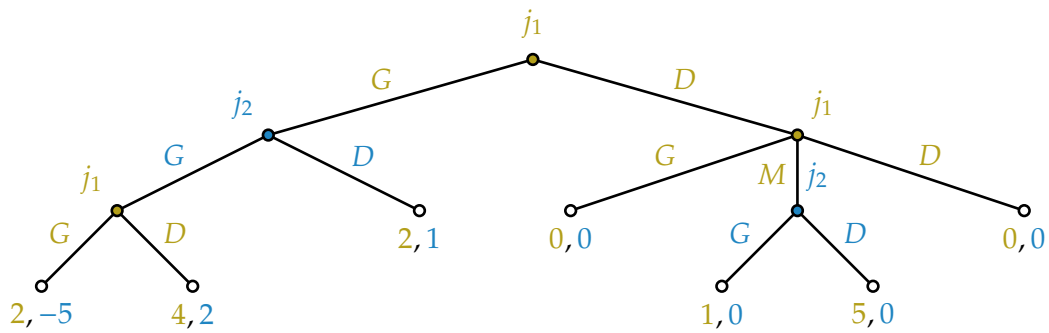
Exemple 28. Dans le jeu d'entrée, le seul équilibre parfait en sous-jeux est (E, A) .

Comme nous nous sommes placés dans le cas fini, nous avons les résultats suivants.

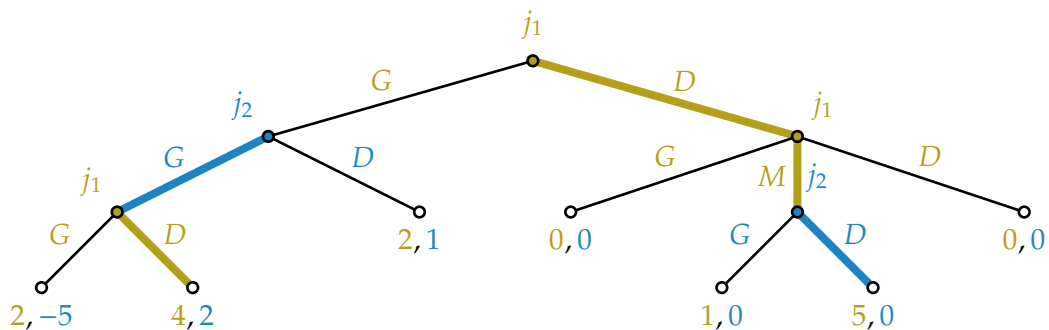
Théorème 4.13 (Zermelo, 1913). Tout jeu sous forme extensive à information parfaite admet un équilibre parfait en sous-jeux en stratégies pures.

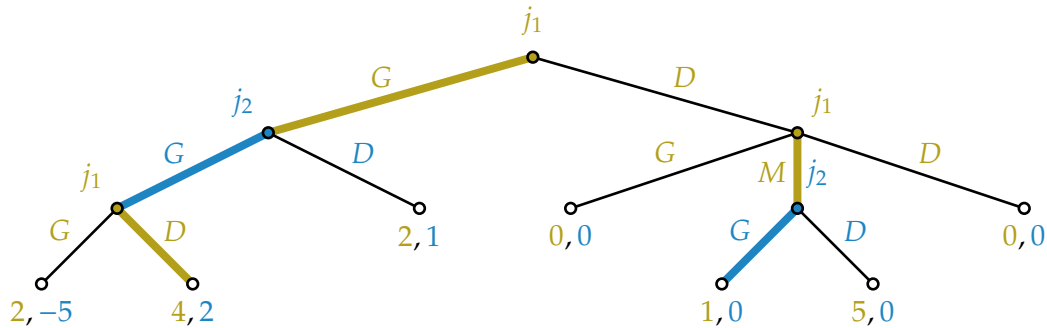
La démonstration de ce résultat se base sur l'algorithme de Kuhn, aussi appelée induction amont, ou backward induction. Dans un jeu à information parfaite, on considère tous les sous-jeux qui ont un seul nœud non-terminal. Le seul joueur actif choisit l'action qu'il préfère. On remplace ensuite ce sous-jeu par le nœud terminal correspondant au paiement choisi par l'unique joueur du jeu. Ainsi, on obtient un jeu plus court que le jeu initial. On poursuit la procédure jusqu'à ce que le jeu devienne un unique nœud terminal, qui nous donne le paiement d'un équilibre parfait en sous-jeux.

Exemple 29. Étudions le jeu suivant.



On a alors deux équilibres parfaits en sous-jeux, donnés par les actions en couleur.





Ce résultat se généralise dans le cas où l'information est incomplète, mais la preuve, et l'identification des sous-jeux minimaux est bien plus complexe.

Théorème 4.14. Tout jeu sous forme extensive à information imparfaite admet un équilibre parfait en sous-jeu en stratégie mixtes.

※ Équilibres corrélés

5.1 Premiers exemples

Dans les cours précédents, nous avons plus ou moins toujours fait l'hypothèse que les choix des joueurs étant indépendants, ou simultanés, de ceux des autres. En pratique, il existe des situations où ce n'est pas forcément le cas. C'est le cas par exemple lorsqu'un automobiliste arrive à une intersection. Si les choix des conducteurs étaient indépendants et simultanés, il se pourrait que deux automobilistes cherchent à traverser au même moment, que ce soit en stratégies pures ou mixtes. Pour pallier à cela, des feux tricolores on était installé, indiquant à chaque conducteur quelle stratégie pure jouer. On cherche ici à *corrél*er les stratégies des joueurs.

Exemple 30 (Jeu de coordination). Considérons le jeu de coordination suivant :

	C	T
C	2, 1	0, 0
T	0, 0	1, 2

Le jeu a trois équilibres de Nash :

- ▷ en stratégies pures: (C, C) avec paiement $(2, 1)$ et (T, T) avec paiement $(1, 2)$;
- ▷ en stratégies mixtes : $(\frac{2}{3}C + \frac{1}{3}T, \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}T)$ avec paiement espéré $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Les deux premiers équilibres ne sont pas symétriques, et le troisième a des paiements insuffisants. Les jeux joueurs pourraient corréliser leurs actions de la façon suivante : lancer une pièce équilibrée, si c'est face jouer (C, C) et si c'est pile jouer (T, T) . Le paiement espéré serait alors de $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Puisque (C, C) et (T, T) sont des équilibres, aucun joueur n'a intérêt à dévier de la stratégie choisie par le lancer de pièce.

Grâce à l'exemple précédent, on remarque que si on autorise les joueurs à procéder à un tirage au sort commun et public avant le jeu, ils peuvent recevoir comme paiement d'équilibre toute combinaison convexe des paiements d'équilibre du jeu d'origine. Est-il possible de créer un mécanisme de corrélation tel que l'ensemble des paiements d'équilibre inclue des paiements qui ne sont pas dans l'enveloppe convexe des paiements d'équilibre du jeu initial ?

Exemple 31. On considère le jeu suivant dans lequel j_1 choisit une ligne, j_2 choisit une colonne et j_3 choisit une matrice :

	G	D		G	D		G	D		
H	0,1,3	0,0,0		H	2,2,2	0,0,0		H	0,1,0	0,0,0
B	1,1,1	1,0,0		B	2,2,1	2,2,2		B	1,1,1	1,0,3
	g			c				d		

On montre que le paiement d'équilibre est $(1, 1, 1)$, alors qu'il existe un mécanisme de corrélation qui donne un paiement d'équilibre $(2, 2, 2)$.

- Il existe une probabilité strictement positive que (G, c) ne soit pas joué par j_2 et j_3 : si j_2 joue G , alors g domine strictement c donc (G, c) ne peut pas être joué avec probabilité 1 ;
- On a que j_1 joue B car cette stratégie domine faiblement T . Depuis, comme (L, c) n'est pas joué avec probabilité 1, B donne un paiement strictement meilleur que T , donc T n'est pas joué à l'équilibre ;
- Comme T est éliminée, d domine strictement c , puis G domine strictement D , donc j_2 joue G et j_3 joue g ou d .

Il ne reste plus que (B, G, g) et (B, G, d) , qui chacun donne le paiement $(1, 1, 1)$.

Le mécanisme de corrélation est le suivant. Les joueurs j_1 et j_2 lancent une pièce non-biaisée, et s'accordent à jouer (H, G) ou (B, D) selon l'issue, pendant que le joueur j_3 joue c . Ainsi, (H, G, c) et (B, D, c) sont choisis équiprobablement

et donnent un paiement de $(2, 2, 2)$. Si j_3 choisit de dévier vers g ou d pour tenter de gagner 3, cela ne se produira qu'une fois sur deux, et son paiement serait alors de $\frac{3}{2}$, inférieur à celui qu'il obtient grâce au mécanisme de corrélation. De plus, ni j_1 ni j_2 ne souhaite dévier, car ils obtiennent chacun le plus grand paiement qu'il leur est possible d'obtenir.

Dans l'exemple précédent, il est nécessaire que le joueur j_3 ne connaissent pas l'issue du lancer de pièce, car il pourrait choisir exactement les bons moments pour dévier sur g ou sur d . Ainsi, tout paiement de l'enveloppe convexe de l'ensemble des paiements d'équilibre peut être atteint par un tirage au sort public, et pour atteindre d'autres paiements il faut que ce tirage au sort ne soit pas totalement public, auquel cas les joueurs reçoivent des informations différentes sur son résultat.

Exemple 32. Étudions le jeu suivant :

	G	D
H	6, 6	2, 7
B	7, 2	0, 0

Le jeu a trois équilibres :

- ▷ (H, D) avec paiement $(2, 7)$, et symétriquement (B, G) avec paiement $(7, 2)$;
- ▷ $(\frac{2}{3}H + \frac{1}{3}B, \frac{2}{3}G + \frac{1}{3})$ avec paiement espéré de $(\frac{14}{3}, \frac{14}{3})$.

On considère le mécanisme dans lequel un observateur extérieur choisit uniformément l'un des couples (H, G) , (H, D) et (B, G) , puis annonce à chaque joueur sa stratégie dans le profil tiré. Si j_1 reçoit H , la probabilité conditionnelle que j_2 ait reçu G est $\frac{1/3}{1/3+1/3} = \frac{1}{2}$. Si j_1 a reçu B , il sait que j_2 a reçu G . Montrons qu'il n'y a pas de déviation unilatérale profitable de la recommandation.

- ▷ Si j_1 reçoit H , son paiement espéré en suivant H est $\frac{1}{2}6 + \frac{1}{2}2 = 4$. S'il dévie, son paiement espéré est $\frac{1}{2}7 + \frac{1}{2}0 = \frac{7}{2}$.
- ▷ Si j_1 reçoit B , son paiement espéré en suivant B est 7, alors qu'en déviant son paiement espéré est 6.

Le jeu étant symétrique, le joueur j_2 tient exactement le même raisonnement. Le paiement espéré en suivant le mécanisme de corrélation est

$$\frac{1}{3}(6, 6) + \frac{1}{3}(7, 2) + \frac{1}{3}(2, 7) = (5, 5),$$

qui n'est pas dans l'enveloppe convexe des paiements d'équilibre du jeu original.

5.2 Définitions formelles

Les exemples précédents montrent que pour obtenir des paiements élevés pour chaque joueur, il faut éviter les pires paiements (par exemple, $(0, 0)$ dans l'exemple précédent). Ceci ne peut pas être accompli dans ces cas-là si les joueurs jouent des stratégies mixtes indépendantes. On fait désormais les hypothèses suivantes :

- ▷ le jeu inclue un observateur, qui recommande des stratégies aux joueurs ;
- ▷ l'observateur choisit ses recommandations *aléatoirement*, suivant une distribution de probabilité *connue* des joueurs ;
- ▷ les recommandations sont privées ;
- ▷ ce mécanisme est *connaissance commune* parmi tous les joueurs : chaque joueur sait que le mécanisme est utilisé, que chaque joueur sait que le mécanisme est utilisé, et ainsi de suite.

Définition 5.1. Une *structure d'information* $\mathcal{I}$ est la donnée de

- ▷ un ensemble d'aléas représenté par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$;
- ▷ une famille d'applications mesurables θ_i de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans S_i .

Cette définition peut se comprendre de la manière suivante : un observateur extérieur choisit la variable aléatoire $\omega \in \Omega$ suivant la mesure de probabilité $\mathbb{P}$, qui définit ensuite pour chaque joueur la recommandation reçue $\theta_i(\omega)$.

Soit $\Gamma = (N, S, g)$ un jeu sous forme normale.

Définition 5.2. Le jeu Γ étendu par $\mathcal{I}$, noté $[\Gamma, \mathcal{I}]$ est le jeu sous forme extensive joué en deux étapes :

1. la variable aléatoire ω est tirée suivant $\mathbb{P}$ et $\theta_i(\omega)$ est envoyé au joueur j_i ;
2. les joueurs jouent dans le jeu Γ selon la recommandation reçue.

Une stratégie (pure) du joueur j_i dans le jeu $[\Gamma, \mathcal{I}]$ est une fonction

$$\tau_i : S_i \rightarrow S_i,$$

qui à chaque recommandation s_i de l'observateur associe une action $\tau_i(s_i) \in S_i$.

La probabilité que le joueur j_i reçoive la recommandation s_i est donnée par

$$\sum_{t_{-i} \in S_{-i}} \mathbb{P}(s_i, t_{-i}).$$

La probabilité conditionnelle que l'observateur ait choisi (s_i, s_{-i}) est

$$\mathbb{P}(s_{-i} \mid s_i) = \frac{\mathbb{P}(s_i, s_{-i})}{\sum_{t_{-i} \in S_{-i}} \mathbb{P}(s_i, t_{-i})}$$

si le dénominateur est strictement positif, et est non-définie sinon.

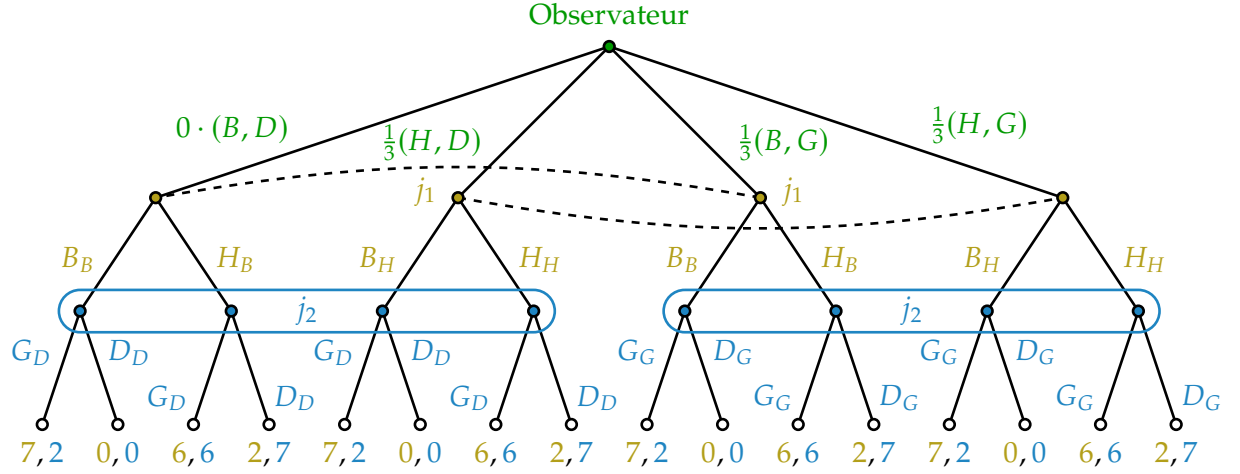


FIGURE 5 – Forme extensive de l'extension de l'exemple 32.

On note τ_i^* la stratégie du joueur j_i qui consiste à suivre la recommandation de l'observateur, c'est-à-dire, $\tau_i^*(s_i) = s_i$ pour tout $s_i \in S_i$.

Définition 5.3. Une structure d'information $\mathcal{I}$ définit un équilibre corrélé si le profil τ^* est un équilibre de Nash du jeu $[\Gamma, \mathcal{I}]$.

Théorème 5.4. Le profil τ^* est un équilibre dans le jeu $[\Gamma, \mathcal{I}]$ si et seulement si, pour tout joueur $i \in N$, pour toutes stratégies $s_i, s'_i \in S_i$, on a

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \mathbb{P}(s_i, s_{-i}) g_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \mathbb{P}(s_i, s_{-i}) g_i(s'_i, s_{-i}).$$

Tout profil de stratégies σ définit une probabilité $\mathbb{P}_\sigma$ sur S :

$$\mathbb{P}_\sigma(s_1, \dots, s_n) = \sigma_1(s_1) \times \dots \times \sigma_n(s_n).$$

Théorème 5.5. Pour tout équilibre de Nash σ^* , $\mathbb{P}_{\sigma^*}$ définit un équilibre corrélé.

Corollaire 5.6. Tout jeu fini admet un équilibre corrélé.

Contrairement aux équilibres de Nash, les équilibres corrélés d'un jeu sont relativement facile à calculer du point de vue de la complexité algorithmique.

Exemple 33. Reprenons le jeu de coordination suivant :

	<i>C</i>	<i>T</i>
<i>C</i>	2, 1	0, 0
<i>T</i>	0, 0	1, 2

Calculons les équilibres corrélés. Notons

$$\alpha = \mathbb{P}(C, C), \quad \beta = \mathbb{P}(C, T), \quad \gamma = \mathbb{P}(T, C), \quad \text{et} \quad \delta = \mathbb{P}(T, T).$$

On a les contraintes suivantes :

$$\alpha g_1(C, C) + \beta g_1(C, T) \geq \alpha g_1(T, C) + \beta g_1(T, T)$$

$$\gamma g_1(T, C) + \delta g_1(T, T) \geq \gamma g_1(C, C) + \delta g_1(C, T)$$

$$\alpha g_2(C, T) + \gamma g_2(T, C) \geq \alpha g_2(C, C) + \gamma g_2(T, T)$$

$$\beta g_2(C, T) + \delta g_2(T, T) \geq \beta g_2(C, C) + \delta g_2(T, C)$$

en addition de celles définissant une mesure de probabilité :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1 \quad \text{et} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0.$$

Évaluer les différents paiements simplifient les expressions des contraintes :

$$\alpha \geq 2\beta, \quad 2\delta \geq \gamma, \quad \delta \geq 2\beta, \quad 2\alpha \geq \gamma,$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1, \quad \text{et} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0.$$

L'ensemble défini par ces inégalités est la combinaison convexe de ces trois points :

$$(1, 0, 0, 0), \quad (0, 0, 0, 1) \quad \text{et} \quad \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right).$$

Ses sommets donnent, respectivement, les paiements suivants :

$$(1, 2), \quad (2, 1) \quad \text{et} \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Comme nous avons déjà vu, l'ensemble des paiements d'équilibre corrélé est donc égal à l'enveloppe convexe des paiements d'équilibre de Nash. Dans l'exemple 32, ces ensembles étaient différents.

5.3 Prolongements

Dans ce cours, nous avons abordé les notions suivantes :

- ▷ *jeux sous forme normale* : stratégies pures et mixtes, domination, équilibre de Nash ;
- ▷ *jeux à somme nulle* : maxmin, minmax, valeur, point-selle, propriétés de l'opérateur valeur, lien avec la dualité des programmes linéaires ;
- ▷ *jeux sous forme extensive* : information parfaite et imparfaite, stratégies pures, mixtes et de comportement, réduction sous forme normale, mémoire parfaite, équilibres parfaits en sous-jeux, induction amont et algorithme de Kuhn ;
- ▷ *équilibres corrélés* : liens avec l'équilibre de Nash, paiements ;
- ▷ *appariements stables* : algorithme de Gale-Shapley, etc.

On pourrait prolonger le cours avec les notions suivantes, qui souvent impliquent un aspect dynamique, ou un abandon de l'aspect unilatéral des prises de décisions.

Jeux coopératifs – Un jeu coopératif est la donnée d'un ensemble de joueurs, et d'une mesure non-additive sur les coalitions. Les valeurs affectées aux coalitions peuvent être définies par un mécanisme stratégique, provenant par exemple de stratégies corrélées, ou non. L'étude des jeux coopératifs se focalise sur les répartitions des gains entre les membres d'une même coalition, et sur les conditions de formation des structures combinatoires de joueurs en fonction de la mesure non-additive.

Jeux répétés – Un jeu sous forme normale est répété un certain nombre de fois. À chaque étape, les joueurs se souviennent des actions jouées par tous les joueurs aux étapes précédentes. Le paiement d'un joueur à la fin du jeu est la moyenne des paiements qu'il a obtenus à chaque répétition.

Jouer à chaque étape un équilibre du jeu en un coup est un équilibre du jeu répété. Y a-t-il d'autres équilibres ? Quels sont les paiements d'équilibres atteignables ?

Jeux stochastiques – Soient n jeux sous forme normale, les joueurs commencent en l'un de ces jeux. Ils y choisissent une action, et reçoivent un paiement. Les actions choisies induisent également une probabilité de transition vers l'un des n jeux qui sont joués à l'étape suivante, et ainsi de suite.

Il y a pour chaque joueur un compromis entre obtenir un bon paiement dans le jeu en cours, et maximiser ses chances d'être dans un bon jeu dans les étapes

suivantes.

Jeux à information incomplète – Deux joueurs s'affrontent. Deux états du monde (c'est-à-dire, deux jeux) sont possibles, l'un étant sélectionné suivant une probabilité uniforme avant le début du jeu et fixé pour toute la suite. Le joueur j_1 connaît l'état du monde, mais pas le joueur j_2 . Les joueurs jouent de manière répétée et observent les actions de l'adversaire, mais pas les paiements.

Le joueur j_1 fait face au compromis suivant : bien jouer dans le correspondant à l'état du monde qu'il connaît. Il prend ainsi le risque de révéler cet état au joueur j_2 , ce qui peut lui être préjudiciable, ou cacher l'état du monde au joueur j_2 .

Jeux différentiels – Les jeux différentiels sont à l'intersection entre la théorie des jeux et la théorie du contrôle. Par exemple, un objet x_1 est à la poursuite d'un objet x_2 , qui cherche à échapper à l'objet qui le poursuit. À chaque instant, chaque objet choisit son vecteur vitesse. Ainsi, la dynamique des joueurs est modélisée par des équations différentielles contrôlées. Combien de temps faut-il à l'objet x_1 pour rattraper l'objet x_2 . S'il ne peut l'attraper, peut-il s'en approcher aussi près qu'il le souhaite ?

Jeux à champ moyen – Un jeu à champ moyen est un jeu différentiel avec un grand nombre de joueurs qui ont chacun peu d'influence individuelle sur le système dans son ensemble. Ils ont été nommés ainsi en référence aux modèles de champs moyens en physique mathématique, qui étudient le comportement de nombreuses particules. Ils ont été entre autres utilisés pour les applications suivantes : modélisation de production optimale d'une ressource naturelle épuisable, comme le pétrole, modélisation de croissance avec distribution hétérogène de richesses, simulation de comportement des foules, etc.

Il existe bien d'autres modèles, comme

- les jeux de Stackelberg ;
- les jeux de recherche-dissimulation ;
- les jeux d'inspection ;
- les jeux combinatoires ;
- les jeux d'emplacements ;
- les systèmes de vote et la théorie du choix social ;
- les jeux d'évolutions ;
- les jeux d'apprentissages, etc.