ENSTA
23 mars 2026
Dylan Laplace Mermoud

TD 1 - RO03
Introduction à la théorie des jeux
Laura Bernardo Estévez

Exercice 1. On considère le jeu sous forme normale ci-dessous :

	G	M	D
H	a, b	c, d	e, f
B	g, h	i, j	k, l

Déterminer les conditions sur les paramètres pour que :

(1) La stratégie H soit strictement dominante ;
(2) La stratégie M soit dominante ;
(3) Le profil (H, G) soit un équilibre en stratégie dominantes.

⋆⋆⋆

Exercice 2 (Appariements stables – Gale et Shapley (1962)). À l'aide des remarques faites en cours, montrer les propriétés suivantes de l'algorithme de Gale-Shapley :

(1) L'algorithme s'arrête en au plus n^2 étapes ;
(2) L'algorithme est bien défini (il induit un appariement) ;
(3) L'appariement induit est stable ;
(4) Il n'y a pas unicité des appariements stables. Pour la liste de préférences suivantes, donner l'ensemble des appariements stables :
   - $x_1 : y_2 \succ y_1 \succ y_3$, $\quad y_1 : x_2 \succ x_1 \succ x_3$;
   - $x_2 : y_3 \succ y_2 \succ y_1$, $\quad y_2 : x_3 \succ x_2 \succ x_1$;
   - $x_3 : y_1 \succ y_3 \succ y_2$, $\quad y_3 : x_1 \succ x_3 \succ x_2$.

   Lequel est produit par l'algorithme de Gale-Shapley ?

⋆⋆⋆

Exercice 3. Dans un groupe de TD, chaque élève choisit un nombre entier entre 0 et 100. On calcule la moyenne M des nombres ainsi choisis, et le plus gagnant est le joueur a avoir choisi le nombre le plus proche de $\frac{1}{2}M$. Participer au jeu, puis proposer une analyse des résultats.

⋆⋆⋆

Exercice 4 (Un problème de partage). On doit partager un gâteau $[0, 1] \times [0, 1]$ entre deux joueurs. Une tierce personne procède de la manière suivante :

(1) Elle déplace son couteau continûment de gauche à droite (de 0 vers 1) sur l'axe x (relativement à la première variable) ;

(2) Le premier joueur qui dit "stop" gagne la part à gauche de x, l'autre celle de droite ;
(3) Si les deux joueurs disent "stop" au même moment, le plus jeune gagne la part de gauche.

La valeur totale du gâteau pour chaque joueur est de 1. La valeur de la part à gauche de x est dénotée par $f(x)$ pour le joueur le plus jeune, et par $g(x)$ pour le joueur le plus âgé. Les fonctions $f, g : [0,1] \to [0,1]$, sont continues, strictement croissantes et satisfont

$$f(0) = g(0) = 0, \qquad f(1) = g(1) = 1.$$

(1) Monter que chaque joueur peut obtenir au moins $\frac{1}{2}$, quel que soient les actions de l'autre joueur.
(2) Si vous connaissez f et g et que vous êtes le joueur le plus jeune (respectivement le plus âgé), quels choix faîtes-vous pour maximiser votre gain ?
(3) Si vous ne connaissez pas la fonction de l'autre joueur, quels choix faîtes-vous pour maximiser votre gain ? Il n'y a pas nécessairement une seule réponse attendue.

$\star\star\star$

Exercice 5 (Enchères à plis scellés). Un bien indivisible est proposé aux enchères à $n \geq 2$ acheteurs. Chaque acheteur $i \in \{1, \ldots, n\}$ attribue une valeur privée v_i au bien et propose un montant b_i uniquement observé par le commissaire-priseur. Le bien est attribué à l'acheteur avec la mise la plus haute et, en cas d'égalité, le gagnant est tiré uniformément parmi les joueurs avec la plus haute mise. On considère deux régimes tarifaires :

- *au premier prix* : le prix payé par le vainqueur correspond au montant auquel il a enchéri ;
- *au second prix* : le prix payé par le vainqueur correspond à la deuxième meilleure offre.

Dans cet exercice, on considère une enchère au second prix.

(1) Écrire le jeu sous forme normale correspondant.
(2) Montrer que miser sa valeur privée est une stratégie dominante.