ENSTA
12 mai 2025
Dylan Laplace Mermoud

TD 5 - RO03
Introduction à la théorie des jeux
Minh Hieu Nguyen

Exercice 1. On considère le jeu

	G	D
H	$2, 0$	$0, 1$
B	$0, 1$	$1, 0$

(1) Trouver tous les équilibres de Nash du jeu.
(2) Décrire l'ensemble des distributions d'équilibres corrélés.

Correction.

Il n'existe pas d'équilibre de Nash en stratégies pures. En stratégies mixtes, l'unique équilibre est $\left(\frac{1}{2}H + \frac{1}{2}B\,,\ \frac{1}{3}G + \frac{2}{3}D\right)$.

Soit (x, y, z, t) une distribution d'équilibre corrélé. j_1 n'a pas intérêt à dévier lorsque

- H est recommandé si $2x \geq y$;
- B est recommandé si $t \geq 2z$;

De même, j_2 n'a pas intérêt à dévier lorsque

- G est recommandé si $z \geq x$;
- D est recommandé si $y \geq t$;

Finalement, on a $2x \geq y \geq t \geq 2z \geq 2x$, d'où

$$x = z = \frac{1}{6} \qquad \text{et} \qquad y = t = \frac{1}{3},$$

ce qui correspond à l'équilibre de Nash trouvé à la question précédente.

⋆⋆⋆

Exercice 2 Trois personnes souhaitent partir en vacances. Chacune peut partir P ou rester R. Les préférences sont identiques pour chacune des personnes : chacun préfère partir à deux, plutôt que de partir à trois, plutôt que de rester, plutôt que de partir seul. Les paiements correspondant sont $3, 1, 0$ et -1.

(1) Mettre le jeu sous forme normale et déterminer les équilibres de Nash en stratégies pures.

(2) Avant que le jeu ne commence, une arbitre tire au hasard $i \in \{1, 2, 3\}$ selon une mesure de probabilité $\mu \in \Delta(\{1, 2, 3\})$, avec probabilité strictement positive sur 1, 2 et 3. Cette probabilité est connue des trois personnes. L'arbitre appelle chacune des personnes de manière privée et indique à la personne i de rester et aux deux autres de partir. Chacun décide ensuite de rester ou de partir, indépendamment et simultanément. Combien de stratégies pures ont chacune de ses personne dans ce nouveau jeu ? Mettre le jeu sous forme extensive sans indiquer les paiements.

(3) Une personne est *accommodante* si elle suit l'indication donnée par l'arbitre. Le profil de stratégies où les trois personnes sont accommodantes est-il un équilibre ?

(4) Construire une distribution d'équilibre corrélé qui donne un paiement strictement plus grand que 1 à tout le monde.

Correction.

(1) Sous forme normale, on a

	P	R
P	$1, 1, 1$	$3, 0, 3$
R	$0, 3, 3$	$0, 0, -1$

P

	P	R
P	$3, 3, 0$	$-1, 0, 0$
R	$0, -1, 0$	$0, 0, 0$

R

Il y a deux équilibres de Nash en stratégies pures : (P, P, P) et (R, R, R).

(2) Chaque joueur dispose de quatre stratégies pures selon la recommandation de l'arbitre : P quand P est recommandé (P_P), P quand R est recommandé (P_R), R quand P est recommandé (R_P) et R quand R est recommandé (R_R).

(3) Soit i le joueur auquel l'arbitre recommande de rester et μ_i la probabilité avec laquelle l'arbitre lui conseille de rester. Pour les joueurs auxquels P est recommandé, il est clairement optimal d'être accommodant. Pour j_i en revanche, il est bénéfique de dévier. Plus formellement, si les deux autres joueurs sont accommodants, la stratégie accommodante donne un paiement espéré de $3(1 - \mu_i)$, alors que jouer toujours P donne $3(1 - \mu_i) + \mu_i$.

(4) Intuitivement, pour ne plus inciter le comportement de la question précédente, l'arbitre doit construire une distribution qui rende non-profitable une déviation lorsque R est recommandé. Pour cela, il faut mettre un poids strictement positif sur le profil (R, R, R). On cherche alors une distribution

$$\frac{p}{3}\left((P, P, R) + (P, R, P) + (R, P, P)\right) + (1 - p)(R, R, R).$$

Un joueur à qui P est recommandé n'aura pas d'intérêt) dévier si $\frac{2p}{3} \times 3 \geq 0$. Un joueur à qui R est recommandé n'aura pas d'intérêt à dévier si $0 \geq \frac{p}{3} - (1 - p)$. De plus, pour garantir un paiement strictement supérieur à 1, il faut $\frac{2p}{3} \times 3 > 1$. On déduit donc que $\frac{1}{2} < p \leq \frac{3}{4}$. Par symétrie entre les joueurs, on construit bien une distribution d'équilibre corrélé.