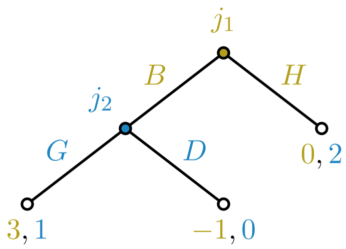
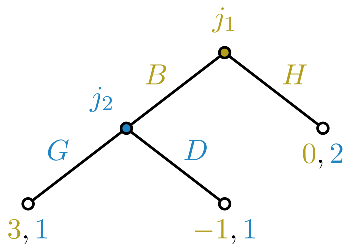
ENSTA
14 avril 2025
Dylan Laplace Mermoud

TD 4 - RO03
Introduction à la théorie des jeux
Minh Hieu Nguyen

Exercice 1. Pour chacun des jeux suivants :

- Mettre le jeu sous forme normale ;
- Calculer l'ensemble des équilibres en stratégies mixtes et leurs paiements ;
- Calculer les équilibres parfaits en sous-jeux.





Correction.

Pour le premier jeu, sous forme normale, on a

	G	D
H	$0, 2$	$0, 2$
B	$3, 1$	$-1, 0$

En stratégies pures on a deux équilibres : (B, G) de paiement $(3, 1)$ et (H, D) de paiement $(0, 2)$. En stratégies mixtes, toute stratégie de j_2 défini par $yG + (1-y)D$ avec $y \leq 0.25$ induit un équilibre $(H, yG + (1-y)D)$ de paiement $(0, 2)$. L'unique équilibre parfait en sous-jeux est (B, G).

Pour le second jeu, la réduction est

	G	D
H	$0, 2$	$0, 2$
B	$3, 1$	$-1, 1$

On a deux équilibres de Nash purs : (B, G) et (H, D) de paiement respectifs $(3, 1)$ et $(0, 2)$. Les équilibres mixtes sont donnés par

$$\{B, yG + (1-y)D \mid y \geq 0.25\}, \qquad \{H, yG + (1-y)D \mid y \leq 0.25\}$$

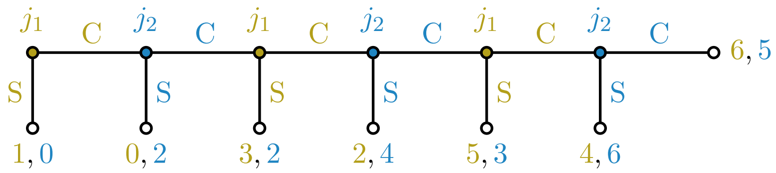
$$\text{et} \qquad \{xH + (1-x)B, 0.25G + 0.75D \mid x \in [0, 1]\}.$$

Finalement, on a une infinité d'équilibres parfaits en sous-jeux. Soit y la probabilité avec laquelle j_2 joue G. Par induction amont, j_1 arbitre entre $4y-1$ et 0, d'où les équilibres

$$\{B, yG + (1-y)D \mid y \geq 0.25\}, \qquad \{H, yG + (1-y)D \mid y \leq 0.25\}$$
$$\text{et} \qquad \{xH + (1-x)B, 0.25G + 0.75D \mid x \in [0,1]\}.$$

⋆⋆⋆

Exercice 2 (Le mille-pattes, Rosenthal, 1982). Considérons le jeu suivant.



- Déterminer les équilibres parfaits en sous-jeux ;
- Commenter.

Correction.

- On procède par induction amont, le seul équilibre parfait en sous-jeux est de jouer S pour chaque joueur à chaque nœud. Le paiement résultant est $(1, 0)$.
- Le paiement des deux joueurs est strictement meilleur s'ils continuent tous les deux.

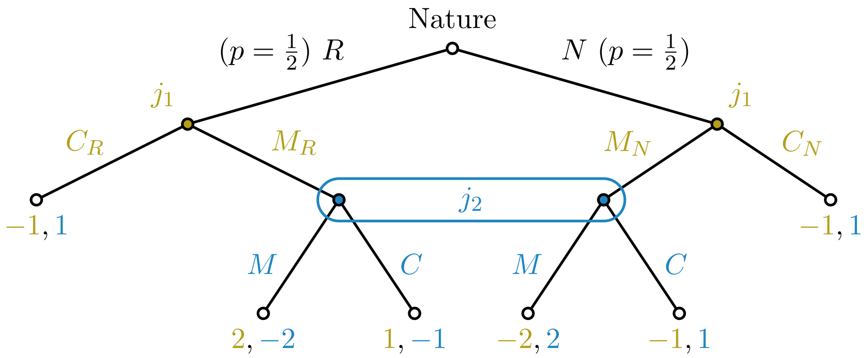
⋆⋆⋆

Exercice 3 (Poker simplifié). Deux joueurs jouent un jeu à somme nulle. La mise est de 1 par joueur pour commencer. Un jeu de 32 cartes est battu et le joueur j_1 tire une carte et la regarde. Le joueur j_2 ne voit pas la carte. Le joueur j_1 peut alors se coucher et donner sa mise au joueur j_2, ou doubler sa mise. Si le joueur j_1 a doublé sa mise, le joueur j_2 peut soit se coucher et donner sa mise au joueur j_1, soit suivre le joueur j_1 en doublant sa mise. Dans ce dernier cas, le joueur j_1 dévoile sa carte, si elle est rouge il ramasse toutes les mises, si elle est noire, c'est le joueur j_2 qui ramasse toutes les mises.

- Mettre le jeu sous forme extensive ;
- Mettre le jeu sous forme normale ;
- Quelle est la valeur du jeu ? Quelles sont les stratégies optimales ?

Correction.

(1) Le jeu sous forme extensive se présente comme suit.



(2) Sa réduction sous forme normale est

	M	C
$M_R \mid M_N$	$0, 0$	$1, -1$
$M_R \mid C_N$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	$0, 0$
$C_R \mid M_N$	$-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	$0, 0,$
$C_R \mid C_N$	$-1, 1$	$-1, 1$

(3) En supprimant les stratégies strictement dominées, on obtient le jeu

	M	C
$M_R \mid M_N$	$0, 0$	$1, -1$
$M_R \mid C_N$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	$0, 0$

L'équilibre de Nash, et donc les stratégies optimales, est donné par

$$1 - y = \frac{1}{2}y \implies y = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}(1-x) = x \implies x = \frac{1}{3}.$$

La valeur est de

$$x(1-y) + \frac{1}{2}(1-x)y = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}.$$

⋆⋆⋆

Exercice 4 (Chomp). Soient n et m deux entiers strictement positifs. Le Chomp est le jeu à information parfaite suivant. Deux joueurs jouent sur un damier de dimension $n \times m$. Chaque joueur coche à tour de rôle une case (x, y) du damier, ce qui recouvre également les cases (x', y') telles que $x' \geq x$ et $y' \geq y$. Le joueur qui coche la case $(1, 1)$ perd.

- Montrer que le joueur qui joue en premier a une stratégie gagnante ;
- Donner une stratégie gagnante lorsque $n = m$;
- On suppose que $(n, m) = (2, +\infty)$. Quel joueur a une stratégie gagnante?

- On suppose que $n \geq 3$ et $m = +\infty$. Quel joueur possède une stratégie gagnante ?

Correction

(1) Chomp est un jeu à information parfaite. D'après le théorème de Zermelo, le jeu possède un équilibre parfait en sous-jeux en stratégies pures. Comme il n'y a pas d'égalité dans ce jeu, soit le joueur j_1 a une stratégie gagnante, soit le joueur j_2 a une stratégie gagnante. Les deux joueurs étant complètement symétrique, c'est le joueur a jouer en premier qui joue sa stratégie gagnante.

(2) Jouer $(2, 2)$ puis le symétrique de ce qui est joué par l'adversaire par rapport à la diagonale.

(3) Le joueur qui joue en second a une stratégie optimale. En effet, si le joueur qui commence enlève l'entièreté de la deuxième ligne, le joueur suivant peut finir avec $(1, 2)$. Supposons donc que le joueur qui joue en premier joue $(2, k)$. Alors le joueur suivant joue $(1, k+1)$, afin de forcer, de proche en proche, la situation gagnante de la question précédente. Si le joueur qui commence joue $(1, k)$, le deuxième à jouer joue $(2, k-1)$ pour revenir à la même situation.

(4) Le joueur qui commence joue $(3, 1)$ pour se retrouver dans la situation de la question précédente en étant le joueur jouant en deuxième.