ENSTA
14 avril 2025
Dylan Laplace Mermoud

TD 2 - RO03
Introduction à la théorie des jeux
Minh Hieu Nguyen

Exercice 1. Résoudre les jeux matriciels suivants, c'est-à-dire, donner la valeur et les stratégies optimales.

	G	C	D
H	2	5	0
B	1	0	2

	G	C	D
H	1	7	6
M	9	1	4
B	3	2	0

Correction.

Première matrice – Le jeu n'admet pas d'équilibre en stratégies pures. Aucune stratégie n'est strictement dominée. Notons x la probabilité que le joueur j_1 met sur H, notons y_1 la probabilité que le joueur j_2 met sur G et y_2 sur C. Supposons $y_1, y_2 \in (0,1)$ et $y_1 + y_2 < 1$. Afin que le deuxième joueur soit indifférent entre ses différentes stratégies pures, on doit avoir

$$2x + (1-x) = 5x = 2(1-x),$$

ce qui est impossible. Supposons alors que $y_1 = 0$. On doit alors avoir

$$5x = 2(1-x) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{7}.$$

Cherchons maintenant y_2 tel que le premier joueur soit indifférent entre ses stratégies pures. On doit avoir

$$5y_2 = 2(1-y_2) \quad \Longrightarrow \quad y_2 = \frac{2}{7},$$

ce qui donnerait une valeur de

$$g(x = 2/7, y_2 = 2/7) = 5\frac{2}{7}\frac{2}{7} + 2\frac{5}{7}\frac{5}{7} = \frac{20+50}{49} = \frac{10}{7}.$$

Alternativement, on suppose $y_2 = 0$. On a alors

$$2x + (1-x) = 2(1-x) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{3},$$

d'où on en déduit $y_1 = 2/3$ et $v = 4/3 < 10/7$. Enfin, on vérifie l'hypothèse $y_2 = 1 - y_1$. Pour déterminer y_1, on résout

$$2y_1 + 5(1-y_1) = y_1 \quad \Longrightarrow \quad y_1 = \frac{5}{4},$$

ce qui n'est pas possible.

Seconde matrice – On remarque que B est strictement dominée pour le joueur j_1 par $0.5H + 0.5M$, on peut donc l'éliminer. Dans le jeu réduit, D est désormais strictement dominé pour le joueur j_2 par $1/3G + 2/3C$, on l'élimine donc également. Il reste donc la matrice

	G	D
H	1	7
B	9	1

Il n'y a pas d'équilibres de Nash en stratégies pures. Notons x la probabilité que le joueur j_1 met sur H, et y celle que le joueur j_2 met sur G. Supposons $x \in (0, 1)$. Le joueur j_1 est alors indifférent entre H et M, d'où

$$y + 7(1 - y) = 9y + (1 - y) \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{3}{7}.$$

Comme $y \in (0, 1)$, on en déduit que

$$x + 9(1 - x) = 7x + (1 - x) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{4}{7}.$$

Il s'agit donc du seul équilibre de Nash, et la valeur du jeu est 31/7.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2 (Jeu diagonal). Soient $a_1, \ldots, a_n > 0$ et $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. Donner la valeur du jeu ainsi qu'un couple de stratégies optimales.

Correction.

Comme chacun des a_i est strictement positif, une stratégie optimale du joueur j_1 est un vecteur de probabilités positives, sinon le joueur j_2 joue où les coefficients sont 0. Ainsi, le joueur j_1 se doit de jouer un vecteur tel que $a_i x_i = a_j x_j$ pour toute paire (i, j). On obtient alors

$$x_i = \frac{1}{a_i \sum_j 1/a_j}.$$

On suit le même raisonnement pour le second joueur. La valeur du jeu est donc

$$v = \frac{1}{\sum_j 1/a_j}.$$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3 (Théorème de Loomis, 1946). Soient A et B deux matrices réelles de taille $|S| \times |T|$ telles que les coefficients de B soient tous strictement positifs. On note $\mathrm{val}(A)$ la valeur (en stratégies mixtes) du jeu matriciel A.

(1) Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{val}(A - vB) = 0$;
(2) En déduire le théorème de Loomis :

Il existe $(\sigma, \tau, v) \in \Delta(S) \times \Delta(T) \times \mathbb{R}$ tel que

$$\sigma^\top A \geq v\sigma^\top B \quad \text{et} \quad A\tau \leq vB\tau.$$

(3) Remarquer que le théorème de Loomis généralise le théorème de von Neumann.

—

Correction.

(1) L'application $t \mapsto \mathrm{val}(A - tB)$ est continue (elle est même $\|B\|_\infty$-Lipschitz continue) et strictement décroissante. De plus,

$$\lim_{t \to +\infty} v(A - tB) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to -\infty} \mathrm{val}(A - tB) = +\infty.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{val}(A - vB) = 0$.

(2) Le jeu représenté par la matrice $A - vB$ a une valeur, 0. Notons (σ^*, τ^*) les stratégies optimales atteignant cette valeur. Grâce au théorème de von Neumann, pour tout (σ, τ), on a

$$\sigma^\top (A - vB)\tau^* \leq 0 \leq (\sigma^*)^\top (A - vB)\tau.$$

On isole chaque inégalité, et on développe :

$$\sigma^\top (A - vB)\tau^* \leq 0 \iff \sigma^\top A\tau^* - v\sigma^\top B\tau^* \leq 0 \iff \sigma^\top A\tau^* \leq v\sigma^\top B\tau^*.$$

En choisissant chaque σ comme des éléments de la base canonique, on retrouve le résultat.

(3) Prendre $B_{ij} = 1$ pour toute paire (i, j) redonne le théorème de von Neumann.

⋆⋆⋆

Exercice 4 (Un jeu non fini). Soit $\Gamma = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, g)$ avec

$$g(s, t) = \frac{1}{s + t + 1}.$$

(1) Calculer l'infsup et le supinf du jeu. A-t-il une valeur ?
(2) Quelles sont les stratégies optimales des joueurs ?
(3) Montrer que 0 est une stratégie strictement dominantes du joueur j_1.

—

Correction

(1) Pour tout $t \in \mathbb{N}$, on a

$$\sup_s \frac{1}{s + t + 1} = \frac{1}{t + 1},$$

donc $\inf_t \sup_s \frac{1}{s+t+1} = 0$. Similaire pour le second joueur. On a donc que la valeur du jeu est 0.

(2) Pour n'importe quel profil (s, t), on a $g(s, t) \geq 0$, donc toute stratégie est optimale pour le joueur j_1. Pour toute stratégie $t \in \mathbb{N}$, il existe une stratégie $s \in \mathbb{N}$ telle que $g(s, t) > 0$, donc aucune stratégie du joueur j_2 n'est optimale.

(3) Pour toute stratégie $s \geq 1$, on a
$$g(0, t) = \frac{1}{t+1} \geq \frac{1}{s+t+1} = g(s, t).$$
Toute stratégie $s \geq 1$ est une stratégie strictement dominée, mais tout de même optimale pour le joueur j_1.

⋆⋆⋆

Exercice 5 (Probabilité invariante). Une matrice réelle de taille $n \times n$ est dite *stochastique* si chaque entrée est positive et la somme des entrées de chacune des lignes vaut 1. Un vecteur ligne $\mu \in \mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont positives et se somment à 1 est appelé *probabilité invariante* par la matrice A si $\mu A = \mu$. Montrer que toute matrice stochastique admet une probabilité invariante.

——

Correction

Soit $B = A - I_n$. On considère le jeu matriciel B. Dans ce jeu, la stratégie uniforme τ^* du joueur j_2 lui garantit 0. Donc $\min_\tau \max_\sigma \sigma^\top B\tau \leq 0$. Soit une stratégie mixte τ du joueur j_2, et soit $s \in \arg\min_t \tau_t$ considéré comme une stratégie pure du joueur j_1. Alors
$$sB\tau = s^\top A\tau - s^\top\tau = \sum_t A_{st}\tau_t - \min_t \tau_t \geq \sum_t A_{st} \min_t \tau_t - \min_t \tau_t \geq 0.$$
Alors $\min_\tau \max_\sigma \sigma^\top B\tau = 0$, donc $\mathrm{val}(B) = 0$.

Soit σ^* une stratégie optimale de j_1. Comme τ^* est une stratégie optimale à support complet, pour toute stratégie $t \in T$, on a $(\sigma^*)^\top Bt = 0$, donc
$$(\sigma^*)^\top A = (\sigma^*)^\top.$$