ENSTA
14 avril 2025
Dylan Laplace Mermoud

TD 2 - RO03
Introduction à la théorie des jeux
Minh Hieu Nguyen

Exercice 1. Résoudre les jeux matriciels suivants, c'est-à-dire, donner la valeur et les stratégies optimales.

	G	C	D
H	2	5	0
B	1	0	2

	G	C	D
H	1	7	6
M	9	1	4
B	3	2	0

⋆⋆⋆

Exercice 2 (Jeu diagonal). Soient $a_1, \ldots, a_n > 0$ et $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. Donner la valeur du jeu ainsi qu'un couple de stratégies optimales.

⋆⋆⋆

Exercice 3 (Théorème de Loomis, 1946). Soient A et B deux matrices réelles de taille $|S| \times |T|$ telles que les coefficients de B soient tous strictement positifs. On note $\operatorname{val}(A)$ la valeur (en stratégies mixtes) du jeu matriciel A.

(1) Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{val}(A - vB) = 0$;
(2) En déduire le théorème de Loomis :

Il existe $(\sigma, \tau, v) \in \Delta(S) \times \Delta(T) \times \mathbb{R}$ tel que
$$\sigma^\top A \geq v\sigma^\top B \quad \text{et} \quad A\tau \leq vB\tau.$$

(3) Remarquer que le théorème de Loomis généralise le théorème de von Neumann.

⋆⋆⋆

Exercice 4 (Un jeu non fini). Soit $\Gamma = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, g)$ avec
$$g(s,t) = \frac{1}{s+t+1}.$$

(1) Calculer l'infsup et le supinf du jeu. A-t-il une valeur ?
(2) Quelles sont les stratégies optimales des joueurs ?
(3) Montrer que 0 est une stratégie strictement dominantes du joueur j_1.

⋆⋆⋆

Exercice 5 (Probabilité invariante). Une matrice réelle de taille $n \times n$ est dite *stochastique* si chaque entrée est positive et la somme des entrées de chacune des lignes vaut 1. Un vecteur ligne $\mu \in \mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont positives et se somment à 1 est appelé *probabilité invariante* par la matrice A si $\mu A = \mu$. Montrer que toute matrice stochastique admet une probabilité invariante.