ENSTA
14 avril 2025
Dylan Laplace Mermoud

TD 2 - RO03
Introduction à la théorie des jeux
Minh Hieu Nguyen

Exercice 1. On considère le jeu sous forme normale ci-dessous en stratégies pures :

	G	D
H	$a, -1$	$b, 1$
B	$c, 1$	$d, -1$

Déterminer les conditions sur les paramètres pour que :

(1) le jeu admette deux équilibres de Nash ;
(2) le jeu n'admette aucun équilibre de Nash ;
(3) le jeu admette un unique équilibre de Nash.

Correction

(1) $c \geq a$ et $b \geq d$.
(2) $a > c$ et $d > b$.
(3) Tous les autres cas, c'est-à-dire, $[a > c$ et $b \geq d]$ ou $[c \geq a$ et $d > b]$.

⋆⋆⋆

Exercice 2 (Pêche). Il y a n pêcheurs exploitant un lac. Si chaque pêcheur $i \in N$ pêche une quantité $s_i \geq 0$, le prix unitaire du poisson est

$$\max\left\{0, 1 - \sum_{i \in N} s_i\right\}.$$

(1) Écrire le jeu sous forme normale ;
(2) Montrer qu'il existe un équilibre de Nash pour lequel les paiements sont non-nuls ;
(3) Comparer la pêche totale et le paiement total en cas de monopole, c'est-à-dire si $n = 1$.

Correction

(1) On a $N = \{1, \ldots, n\}$, $S_i = \mathbb{R}_+$ et

$$g_i(s) = s_i \max\left\{0, 1 - \sum_{j \in N} s_j\right\}.$$

(2) Soit $s = (s_1, \ldots, s_n)$ un équilibre de Nash. Notons

$$c_{-i} = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} s_j \quad \text{et} \quad c = \sum_{j \in N} s_j.$$

Supposons qu'il existe un joueur $i \in N$ tel que $c_{-i} < 1$. On cherche une stratégie s_i tel que $1 - c_{-i} - s_i \geq 0$. Le gain du joueur i peut s'écrire comme

$$g_i(s_i, s_{-i}) = s_i \max\{0, 1 - c_{-i} - s_i\} = s_i(1 - c_{-i}) - s_i^2.$$

Dériver cette expression par rapport à s_i donne

$$\partial_{s_i} g_i(s_i, s_{-i}) = 1 - c_{-i} - 2s_i, \quad \text{et} \quad \partial^2_{s_i} g_i(s_i, s_{-i}) = -2.$$

La dérivée est nulle en $s_i^* = \frac{1-c_{-i}}{2}$, et la dérivée seconde est négative au voisinage de s_i^*, donc s_i^* est bien un maximum, donc une meilleure réponse. Alors, $c < 1$, et pour tout $j \in N$ on a $c_{-j} < 1$, donc $s_j = \frac{1-c_{-j}}{2}$. On a alors $s_i = \frac{1}{n+1}$ pour tout $i \in N$, ce qui est bien un équilibre de Nash donnant des paiements non-nuls.

(3) En cas de monopole, on a $g(s) = s \max\{0, 1 - s\}$. On a $g(s) \geq 0$ quand $s \in [0, 1]$, et $g(s) = 0$ sinon. On se concentre donc sur le cas $s \in [0, 1]$, qui nous permet de réécrire la fonction d'utilité

$$g(s) = s(1 - s).$$

Les dérivées première et seconde donnent

$$g'(s) = 1 - 2s, \quad \text{et} \quad g''(s) = -2.$$

La dérivée première s'annule en $s^* = 0.5$ avec une dérivée seconde nulle à son voisinage. Alors, le meilleur choix de l'unique joueur et de pêcher une quantité de 0.5, ce qui donne un revenu de

$$g(0.5) = 0.5(1 - 0.5) = 0.25.$$

⋆⋆⋆

Exercice 3. Trouver tous les équilibres de Nash en stratégies mixtes ainsi que les paiements correspondants dans chacun des jeux suivants :

	G	D
H	$-3, -3$	$-10, 0$
B	$0, -10$	$-5, -5$

	G	D
H	$2, 1$	$0, 0$
B	$0, 0$	$1, 2$

	G	D
H	$1, 2$	$3, 1$
B	$2, 0$	$0, 3$

Correction Pour le premier jeu, il y a un équilibre en stratégies strictement dominantes : (B, D). Pour le deuxième jeu, on a deux équilibres en stratégies pures : (H, G) et (B, D). En stratégies mixtes, on a $\left(\frac{2}{3}H + \frac{1}{3}B,\ \frac{1}{3}G + \frac{2}{3}D\right)$. Enfin, pour le troisième jeu on a seulement un équilibre en stratégies mixtes, $\left(\frac{3}{4}H + \frac{1}{4}B, \frac{3}{4}G + \frac{1}{4}D\right)$.

⋆⋆⋆

Exercice 4 Soit le jeu symétrique suivant à trois joueurs : chacun choisit simultanément de lever ou de baisser la main, et gagne s'il est seul dans sa position.

(1) Mettre le jeu sous forme normale ;
(2) Donner les équilibres en stratégies pures ;
(3) Donner les équilibres en stratégies mixtes.

Correction

(1) Le jeu a trois joueurs, la trimatrice est coupée en deux, avec des tableaux représentant les situations où le troisième joueur joue "H_3", ou "B_3".

H_3 :

	H_2	B_2
H_1	$0, 0, 0$	$0, 1, 0$
B_1	$1, 0, 0$	$0, 0, 1$

B_3 :

	H_2	B_2
H_1	$0, 0, 1$	$1, 0, 0$
B_1	$0, 1, 0$	$0, 0, 0$

(2) Il y a six équilibres, lorsque deux joueurs choisissent une position et le troisième l'autre. En effet, le troisième gagne et ne veut pas changer de stratégie, tandis que les deux autres sont indifférents.

(3) On note x, y et z les probabilités respectives de choisir "B" et commençons par calculer la meilleure réponse pour le joueur j_3. Le paiement est $(1-x)(1-y)$ en jouant B_3 et xy en jouant H_3. Comme $(1-x)(1-y) > xy$ est équivalent à $x+y<1$, la meilleure réponse est $z=1$ si $x+y<1$, et $z=0$ sinon. Si $x+y=1$ n'importe quel z est compris dans l'ensemble des meilleures réponses. Le jeu étant symétrique, il se passe la même chose pour x et y. Soit (x,y,z) un équilibre de Nash non-pur. Supposons qu'au moins deux joueurs jouent une stratégie non-pure, par exemple, $x, y \in]0,1[$. Cela implique que j_1 et j_2 soit indifférents, donc

$$y+z=1, \quad \text{et} \quad x+z=1.$$

Alors, on a $x=y=1-z \in]0,1[$. Comme j_3 utilisent lui aussi une stratégie mixte, il est indifférent entre ses deux stratégies pures, ce qui implique $x+y=1$, donc $x=y=z=0.5$, qui est bien un équilibre de Nash. Supposons maintenant qu'un seul joueur joue une stratégie non-pure. Les équilibres sont les profils où les deux autres joueurs jouent deux actions pures différentes. Il y a donc une infinité d'équilibres.