ENSTA
3 avril 2025
Dylan Laplace Mermoud

TD 1 - RO03
Introduction à la théorie des jeux
Minh Hieu Nguyen

Exercice 1. On considère le jeu sous forme normale ci-dessous :

	G	M	D
H	a, b	c, d	e, f
B	g, h	i, j	k, l

Déterminer les conditions sur les paramètres pour que :

(1) La stratégie H soit strictement dominante ;
(2) La stratégie M soit dominante ;
(3) Le profil (H, G) soit un équilibre en stratégie dominantes.

Correction

(1) $a > g$, $c > i$ et $e > k$.
(2) $d \geq b$, $d \geq f$, $j \geq h$ et $j \geq l$.
(3) (H, G) est un équilibre en stratégie dominante si et seulement si H et G sont des stratégies dominantes pour chacun des joueurs, c'est-à-dire si et seulement si

$$a \geq g, c \geq i, e \geq k \quad \text{et} \quad b \geq d, b \geq f, h \geq j, h \geq l.$$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2 (Appariements stables – Gale et Shapley (1962)). À l'aide des remarques faites en cours, montrer les propriétés suivantes de l'algorithme de Gale-Shapley :

(1) L'algorithme s'arrête en au plus n^2 étapes ;
(2) L'algorithme est bien défini (il induit un appariement) ;
(3) L'appariement induit est stable ;
(4) Il n'y a pas unicité des appariements stables. Pour la liste de préférences suivantes, donner l'ensemble des appariements stables :
- $x_1 : y_2 \succ y_1 \succ y_3$, $\quad y_1 : x_2 \succ x_1 \succ x_3$;
- $x_2 : y_3 \succ y_2 \succ y_1$, $\quad y_2 : x_3 \succ x_2 \succ x_1$;
- $x_3 : y_1 \succ y_3 \succ y_2$, $\quad y_3 : x_1 \succ x_3 \succ x_2$.

Lequel est produit par l'algorithme de Gale-Shapley ?

Correction

(1) Observer que l'algorithme s'arrête nécessairement après que chacun des n lycéens ait déposé une candidature pour chacune des n universités, ce qui fait n^2 paires. À noter que la meilleure borne possible n'est pas n^2 mais $(n-1)^2+1$.
(2) On remarque que, dès lors qu'une université a choisi un lycéen, elle aura toujours au moins un étudiant à choisir à chaque itération. En supposant que l'algorithme ne retourne pas un appariement, alors il existe un lycéen qui a déposé une candidature dans chacune des n universités qui ne l'ont pas accepté. Cela implique que chacune des universités a déjà accepté un autre étudiant, or il n'existe pas de bijection de $\{1,\dots,n-1\}$ vers $\{1,\dots,n\}$.
(3) Supposons qu'il y ait une instabilité dans l'appariement μ proposé par l'algorithme. Alors il existe $l, l' \in L$ et $u, u' \in U$ tels que $\mu(l) \neq u$, $\mu(l) = u'$, $\mu(l') = u$ et l préfère u à u' et u préfère l à l'. Comme l descend dans sa liste de préférences, il a nécessairement déposé une candidature chez u. Deux cas sont à distinguer :
   - Si u a accepté, alors elle a rompu la paire. Il existe $l'' \in L$ préféré à l. Or, comme u préfère l à l' et $\mu(l') = u$, on aboutit à une contradiction par transitivité des préférences.
   - Si u a refusé, on aboutit à une contradiction similaire.
(4) Il y a trois appariement stable :
   - $\mu(x_1) = y_2$, $\mu(x_2) = y_3$ et $\mu(x_3) = y_1$, donné par Gale-Shapley ;
   - $\mu(x_1) = y_3$, $\mu(x_2) = y_1$ et $\mu(x_3) = y_2$;
   - $\mu(x_1) = y_1$, $\mu(x_2) = y_2$ et $\mu(x_3) = y_3$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3. Dans un groupe de TD, chaque élève choisit un nombre entier entre 0 et 100. On calcule la moyenne M des nombres ainsi choisis, et le plus gagnant est le joueur a avoir choisi le nombre le plus proche de $\frac{1}{2}M$. Participer au jeu, puis proposer une analyse des résultats.

Correction On raisonne par niveaux de rationalité. La valeur moyenne est au plus 100 si tous les joueurs choisissent 100. On a donc $\frac{1}{2}M \leq 50$, et il est donc (faiblement) dominé de jouer tout entier supérieur à 50 quelque soit le niveau de rationalité des autres joueurs. Si j'anticipe que mes adversaires sont rationnels au premier niveau, alors aucun joueur ne jouera une valeur supérieure à 50 et la moitié de la moyenne n'excédera pas 25. En itérant ce raisonnement, lorsque le niveau de rationalité des joueurs tend vers $+\infty$, il est préférable de jouer 0.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 4 (Un problème de partage). On doit partager un gâteau $[0,1]\times[0,1]$ entre deux joueurs. Une tierce personne procède de la manière suivante :

(1) Elle déplace son couteau continûment de gauche à droite (de 0 vers 1) sur l'axe x (relativement à la première variable) ;
(2) Le premier joueur qui dit “stop” gagne la part à gauche de x, l'autre celle de droite ;
(3) Si les deux joueurs disent “stop” au même moment, le plus jeune gagne la part de gauche.

La valeur totale du gâteau pour chaque joueur est de 1. La valeur de la part à gauche de x est dénotée par $f(x)$ pour le joueur le plus jeune, et par $g(x)$ pour le joueur le plus âgé. Les fonctions $f, g : [0,1] \to [0,1]$, sont continues, strictement croissantes et satisfont

$$f(0) = g(0) = 0, \qquad f(1) = g(1) = 1.$$

(1) Monter que chaque joueur peut obtenir au moins $\frac{1}{2}$, quel que soient les actions de l'autre joueur.
(2) Si vous connaissez f et g et que vous êtes le joueur le plus jeune (respectivement le plus âgé), quels choix faîtes-vous pour maximiser votre gain ?
(3) Si vous ne connaissez pas la fonction de l'autre joueur, quels choix faîtes-vous pour maximiser votre gain ? Il n'y a pas nécessairement une seule réponse attendue.

—

Correction

(1) Posons $x^* = f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $y^* = g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$. En s'arrêtant en x^* (resp. y^*), le joueur 1 (resp. 2) s'assure d'avoir une part de valeur au moins $\frac{1}{2}$. Ils n'ont pas d'intérêt à s'arrêter avant. En effet, si le joueur 2 s'arrête en $x < x^*$, alors le joueur 1 reçoit une part de valeur $1 - f(x) > \frac{1}{2}$. De même pour le joueur 2 si le joueur 1 s'arrête avant y^*.
(2) Deux cas à distinguer :
  - Si $x^* \leq y^*$, alors le joueur 1 a intérêt à s'arrêter en y^* et gagner $f(y^*)$;
  - Si $x^* > y^*$, alors le joueur 1 a intérêt à s'arrêter en x^*. Si le joueur 2 connaît f, il choisira de s'arrêter légèrement avant x^*.
(3) Sans aucune information, il n'y a pas de stratégie optimale. Jouer x^* est un choix prudent garantissant une part de valeur au moins $\frac{1}{2}$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 5 (Enchères à plis scellés). Un bien indivisible est proposé aux enchères à $n \geq 2$ acheteurs. Chaque acheteur $i \in \{1, \ldots, n\}$ attribue une valeur privée v_i au bien et propose un montant b_i uniquement observé par le commissaire-priseur. Le bien est attribué à l'acheteur avec la mise la plus haute et, en cas d'égalité, le gagnant est tiré uniformément parmi les joueurs avec la plus haute mise. On considère deux régimes tarifaires :

- *au premier prix* : le prix payé par le vainqueur correspond au montant auquel il a enchéri ;

- *au second prix* : le prix payé par le vainqueur correspond à la deuxième meilleure offre.

Dans cet exercice, on considère une enchère au second prix.

(1) Écrire le jeu sous forme normale correspondant.
(2) Montrer que miser sa valeur privée est une stratégie dominante.

Correction

(1) Les joueurs sont les acheteurs $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pour tout joueur i, les stratégies appartiennent à $S_i = \mathbb{R}_+$. En fixant un profil de stratégies adverses s_{-i}, posons $M_i(s_{-i}) = \max_{j \neq i} s_j$. On a alors
$$g_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} 0, & \text{si } s_i < M_i(s_{-i}), \\ \frac{v_i - M_i(s_{-i})}{|\{j | s_j = s_i\}|}, & \text{si } s_i \geq M_i(s_{-i}). \end{cases}$$
(2) On fixe un profil de stratégie quelconque $(s_1, \ldots, s_n)$ et on montre que $g_i(v_i, s_{-i}) \geq g_i(s_i, s_{-i})$. Premièrement, remarquons que $g_i(v_i, s_{-i}) \geq 0$. En effet, si $v_i < M_i(s_{-i})$, alors le gain est de 0, mais si $v_i \geq M_i(s_{-I})$, alors on a
$$g_i(v_i, s_{-i}) = \frac{v_i - M_i(s_{-i})}{|\{j \mid s_j = s_i\}|} \geq 0.$$
À présent, on distingue différents cas :
   - Si $s_i < M_i(s_{-i})$, alors $g_i(s_i, s_{-i}) = 0$. Or $g_i(v_i, s_{-i}) \geq 0$ et on a donc bien $g_i(v_i, s_{-i}) \geq g_i(s_i, s_{-i})$;
   - Si $s_i \geq M_i(s_{-i})$ et $v_i \leq M_i(s_{-i})$, alors $g_i(s_i, s_{-i}) \leq 0 \leq g_i(v_i, s_{-i})$.
   - Si $s_i \geq M_i(s_{-i})$ et $v_i > M_i(s_{-i})$, alors
$$g_i(v_i, s_{-i}) = v_i - M_i(s_{-i}) \geq g_i(s_i, s_{-i}).$$
Ainsi, enchérir à hauteur de v_i est bien une stratégie dominante.