ÉQUILIBRES DE NASH

DYLAN LAPLACE MERMOUD

Brèves notes de cours adaptées du cours de Tristan Garrec et du livre intitulé "Bases mathématiques de la théorie des jeux" de Rida Laraki, Jérôme Renault et Sylvain Sorin.

1. Équilibres de Nash: premières définitions

La notion d'*équilibre de Nash* s'intéresse principalement à la stabilité d'une situation étudiée, plutôt qu'à la maximisation de l'utilité, ou d'un gain, d'un certain joueur. Comme avec les équilibres en stratégies dominantes et strictement dominantes, un équilibre de Nash est un profil de stratégies, c'est-à-dire un n-uplet de stratégies, où à chaque joueur correspond une unique stratégie.

Ainsi, pour savoir si nous sommes, ou non, dans une situation décrite par un équilibre de Nash, il nous faut connaitre la stratégie de chacun des joueurs, et leur fonction d'utilité. Dans un équilibre de Nash, aucun joueur n'a envie de changer sa stratégie si personne d'autre ne décide d'en changer. Dans ce sens, cela fait référence à un certaine idée de la stabilité de la situation dans laquelle les joueurs sont, qu'elle leur soit profitable ou non.

Définition 1. Un profil de stratégies $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ est un *équilibre de Nash* si pour tout joueur $i \in N$, et pour tout $t_i \in S_i$, on a

$$g_i(s_i, s_{-i}) \geq g_i(t_i, s_{-i}).$$

On note $\mathrm{NE}(\Gamma)$ l'ensemble des équilibres de Nash du jeu Γ.

La notion d'équilibre de Nash est liée à la notion de *meilleure réponse*. Étant donné un profil partiel $s_{-i} \in S_{-i}$, le joueur i doit choisir sa stratégie $s_i \in S_i$. On peut s'attendre de ce joueur qu'il choisisse une des meilleures réponses disponibles au contexte décrit par s_{-i}.

Définition 2. Une stratégie $s_i \in S_i$ est dite *meilleure réponse* à $s_{-i} \in S_{-i}$ si pour tout $t_i \in S_i$, on a

$$g_i(s_i, s_{-i}) \geq g_i(t_i, s_{-i}).$$

On note par $\mathrm{Br}_i(s_{-i}) = \arg\max_{s_i \in S_i} g_i(s_i, s_{-i})$ l'ensemble des meilleures réponses à s_{-i}.

La notion de *meilleure réponse* est un concept aidant à l'analyse du jeu, mais non à la prise de décision. En effet, lors du précédent, nous avons émis l'hypothèse que les joueurs prenaient leur décision en même temps, ou au moins qu'ils ne sont pas au courant des choix des autres au moment de faire le leur. Ainsi, un joueur qui doit faire un choix ne connait pas s_{-i}, et donc $\mathrm{Br}(s_{-i})$.

Cependant, il s'agit d'un outil très utile pour l'étude mathématique des stratégies et des profils, en particulier pour l'existence de profils avec certaines propriétés comme les équilibres de Nash.

Proposition 1. *Un profil de stratégies $s \in S$ est un équilibre de Nash si et seulement si, pour tout joueur $i \in N$, on a $s_i \in \mathrm{Br}(s_{-i})$.*

Exemple 1. Reprenons l'Exemple 2 "Jeu de coordination" du premier cours, où la matrice de gain était

	C	T
C	$2, 1$	$0, 0$
T	$0, 0$	$1, 2$

Analysons exhaustivement la situation. Nous avons quatre profils possibles : (C, C), (C, T), (T, C) et (T, T). On voit aisément que (C, T) et (T, C) ne peuvent pas être des équilibres de Nash, car chacun des joueurs souhaite rejoindre l'autre. Regardons maintenant le profil (C, C). Le jeu étant symétrique, la situation est la même que pour le profil (T, T). Prenons le premier joueur, qui obtient un gain de 2 sur le profil (C, C). Sa seule autre stratégie alternative serait d'aller au théâtre, ce qui modifierait son paiement à 0. Pour le joueur 2, même si son paiement est moindre sur (C, C), n'a tout de même pas envie d'aller au théâtre tout seul (rappelons que l'équilibre de Nash prend seulement en compte les déviations unilatérales). On a alors que (C, C) et (T, T) sont tous deux des équilibres de Nash. $\diamondsuit$

Exemple 2. Reprenons à présent l'Exemple 3 "Tir de pénalty". La matrice de paiement est donné par

	G	D
G	$1, -1$	$-1, 1$
D	$-1, 1$	$1, -1$

On voit clairement dans les règles du jeu qu'il n'y a pas d'équilibre de Nash dans ce jeu, le tireur souhaitant tirer là où il n'y a pas le gardien, le gardien voulant se placer là où le joueur tire. $\diamondsuit$

Exemple 3. Nous allons voir à présent que l'équilibre de Nash peut représenter une situation très inconfortable pour chacun des joueurs. La matrice de paiement du dilemme du prisonnier présenté à l'Exemple 4 des notes du premier cours est la suivante

	T	S
T	$-3, -3$	$0, -4$
S	$-4, 0$	$-1, -1$

Le profil (T, T) est un équilibre de Nash. En effet, si chacun sait que l'autre va trahir, aucun n'a envie de se taire. Il s'agit également du seul équilibre de Nash. $\diamondsuit$

Nous avons vu dans les trois exemples précédents qu'un jeu peut avoir aucun, un unique, ou plusieurs équilibres de Nash. Comme pour les équilibres en stratégies dominées, on a des équilibres de Nash stricts ou non.

Exemple 4. Considérons le jeu sous forme simple suivant :

	G	D
H	$2, 2$	$1, 1$
B	$1, 1$	$1, 1$

Il y a deux équilibres de Nash : (H, G) et (B, D). Cependant, ces deux profils ne font pas preuve de la même stabilité. En effet, sur le profil (B, D), les deux joueurs sont complètement indifférents entre la stratégie qu'ils sont en train de jouer, et leur stratégie alternative, ce qui rend le profil (B, D) relativement peu stable. Au contraire, sur le profil (H, G), personne n'a envie de dévier, car cela revient à diviser son gain par deux. On peut donc supposer qu'une déviation de (H, G) est bien moins probable qu'une déviation de (B, D), même si aucune déviation n'est réellement attendue, comme ce sont des équilibres de Nash. $\diamond$

Nous avons maintenant vu deux types d'équilibres, les équilibres en stratégies dominantes et les équilibres de Nash. Les équilibres en stratégies dominantes sont plus forts que les équilibres de Nash, car le choix d'une stratégie dépend uniquement des stratégies disponibles pour le joueur, et non des stratégies choisies par les autres joueurs, donc du profil entier.

Un équilibre en stratégies dominantes a un pouvoir prédictif plus important qu'un équilibre de Nash, car il ne contient que des stratégies que les joueurs ont intérêt à jouer dans tous les cas. Un équilibre de Nash, en particulier quand plusieurs existent, n'a pas réellement de pouvoir prédictif, et caractérise simplement la stabilité d'une situation donnée. De plus, nous avons les résultats suivants.

Proposition 2.

(1) *L'équilibre en stratégies strictement dominantes est l'unique équilibre de Nash ;*
(2) *L'ensemble des équilibres de Nash est inchangé par élimination itérée de stratégies strictement dominées ;*
(3) *Si un jeu est résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées, alors le profil obtenu est l'unique équilibre de Nash du jeu.*

Proposition 3.

(1) *Un équilibre en stratégies dominantes est un équilibre de Nash ;*
(2) *La suite des ensembles des équilibres de Nash obtenue par élimination itérée de stratégies faiblement dominées est décroissante.*

2. Stratégies mixtes

On commence cette section par un exemple bien connu.

Exemple 5 (Pierre, Feuille, Ciseau)**.** La matrice de paiement du jeu est la suivante :

	P	F	C
P	$0, 0$	$-1, 1$	$1, -1$
F	$1, -1$	$0, 0$	$-1, 1$
C	$-1, 1$	$1, -1,$	$0, 0$

On réalise assez vite que ce jeu ne contient équilibre de Nash. Cependant, si les joueurs sont autorisés à jouer des distributions de probabilités de stratégies pures, appelées stratégies mixtes, alors il existe un équilibre de Nash. Cet équilibre est donné par le profil composé pour chaque joueur de la stratégie suivante : on joue P avec une probabilité $\frac{1}{3}$, on joue F avec une probabilité $\frac{1}{3}$, et enfin on joue C avec une probabilité $\frac{1}{3}$. En effet, si un joueur joue autre chose, il favorise au moins une des trois actions, ou en délaisse une, ce qui donne un avantage certain à son adversaire, et comme il s'agit d'un jeu à somme nulle, où le gain d'un joueur est la perte de l'autre, le fait de dévier de la stratégie explicitée au-dessus décroit nécessairement son gain. $\diamondsuit$

On appelle *jeu fini* un jeu sous forme normale avec un nombre fini de joueurs tel que chaque ensemble de stratégie est fini. Pour un ensemble de stratégies fini S_i, on dénote par $\Delta(S_i)$ l'ensemble des probabilités sur S_i, c'est-à-dire

$$\Delta(S_i) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{S_i} \;\middle|\; \sum_{s \in S_i} x_s = 1 \text{ et } x_s \geq 0, \forall s \in S_i \right\}.$$

Un élément de $\Delta(S_i)$ est appelé une *stratégie mixte*. Un élément de S_i est appelée une *stratégie pure*. On simplifie les notations en posant :

$$\Sigma_i = \Delta(S_i), \quad \text{et} \quad \Sigma = \bigtimes_{i \in N} \Sigma_i = \bigtimes_{i \in N} \Delta(S_i).$$

Définition 3. L'*extension mixte* du jeu fini $\Gamma = (N, S, g)$ est le jeu $\Gamma^\Delta = (N, \Sigma, g)$. La fonction de paiement g est étendue multilinéairement : pour tout profil $\sigma \in \Sigma$, le paiement du joueur $i \in N$ est donné par

$$g_i(\sigma) = \mathbb{E}_\sigma[g] = \sum_{s \in S} \left(\prod_{j \in N} \sigma_j(s_j) \right) g_i(s).$$

Exemple 6. Étudions l'extension mixte du "Tir de penalty". La matrice de gain est

	G	D
G	$1, -1$	$-1, 1$
D	$-1, 1$	$1, -1$

Considérons un profil mixte $\sigma \in \Delta(\{G, D\})^2$. Le gain du gardien est

$$\begin{aligned} g_1(\sigma) = \sigma_1(G)\sigma_2(G)g_1(G,G) + \sigma_1(D)\sigma_2(D)g_1(D,D) \\ + \sigma_1(G)\sigma_2(D)g_1(G,D) + \sigma_1(D)\sigma_2(G)g_1(G,D) \\ = \sigma_1(G)\sigma_2(G) + \sigma_1(D)\sigma_2(D) - (\sigma_1(G)\sigma_2(D) + \sigma_1(D)\sigma_2(G)). \end{aligned}$$

Le premier terme de la somme correspond à la probabilité d'être dans une situation où le tireur et le gardien choisissent le même côté, et le second terme correspond à la probabilité de choisir des côtés différents. $\diamondsuit$

Nous avons vu précédemment que le jeu du tir de pénalty n'a pas d'équilibre de Nash en stratégie pure. Est-ce toujours le cas en stratégie mixte ?

3. Équilibres de Nash en stratégies mixtes

Définition 4. Un équilibre de Nash en stratégies mixtes du jeu Γ est un équilibre de Nash de son extension mixte Γ^Δ.

Pour tout $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$, l'ensemble des meilleures réponses $\mathrm{Br}(\sigma_{-i})$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble des meilleures réponses pures. On constate que grâce à la linéarité de g_i par rapport à σ_i, le paiement maximum est le même que l'on maximise parmi les stratégies mixtes ou parmi les stratégies pures du joueur i:

$$\max_{t_i \in S_i} g_i(t_i, \sigma_{-i}) = \max_{\tau_i \in \Sigma_i} g_i(\tau_i, \sigma_{-i}).$$

On a alors en particulier qu'un équilibre de Nash en stratégies pures est un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Nous avons maintenant tous les éléments pour présenter le résultat le plus important de cette séance.

Théorème 1 (Nash, 1950)**.** *Tout jeu fini admet un équilibre de Nash en stratégie mixte.*

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du résultat suivant.

Théorème 2 (Kakutani, 1941)**.** *Soit C un convexe compact non-vide d'un espace euclidien de dimension finie. Soit $\phi : C \to 2^C$ une fonction hémicontinue supérieurement sur C telle que $\phi(x)$ est non-vide, fermé et convexe pour tout $x \in C$. Alors ϕ a un point fixe.*

Preuve. L'idée est d'appliquer le théorème du point fixe de Kakutani sur la correspondance de meilleure réponse. On définit $\mathrm{Br} : \Sigma \to 2^\Sigma$ la correspondance de meilleure réponse, définie par

$$\mathrm{Br}(\sigma) = \bigtimes_{i \in N} \mathrm{Br}_i(\sigma_{-i}).$$

On vérifie maintenant les hypothèses du théorème de Kakutani.

Premièrement, le domaine de la correspondance de meilleure réponse est l'ensemble des profils de stratégies mixtes Σ. Cet ensemble est de dimension fini car le nombre de joueur et de stratégies pures par joueur est fini. Il est compact et convexe car il est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points (les profils de stratégies pures).

Nous avons vu plus tôt que l'ensemble des meilleures réponses $\mathrm{Br}_i(\sigma_{-i})$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble des meilleures réponses pures. Comme g est multilinéaire sur un espace euclidien de dimension finie, elle est continue, et grâce au théorème de Weierstrass l'ensemble des meilleures réponses est non-vide. Donc pour tout $\sigma \in \Sigma$, on a $\mathrm{Br}(\sigma)$ non-vide, convexe et fermé.

Il reste à montrer que Br est hémicontinue supérieurement. Pour cela, nous utilisons le théorème du maximum de Berge.

Théorème 3 (Berge, 1959)**.** *Soient X et Θ deux espaces topologiques, $f : X \times \Theta \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\phi : \Theta \to 2^X$ une correspondance à valeurs compactes telle que $\phi(\theta)$ soit non-vide pour tout $\theta \in \Theta$. On définit la* fonction marginale *$f^* : \Theta \to \mathbb{R}$ par*

$$f^*(\theta) \coloneqq \sup_{x \in \phi(\theta)} f(x, \theta)$$

et l'ensemble des maximiseurs $\phi^* : \Theta \to 2^X$ par

$$\phi^*(\theta) \coloneqq \arg\max_{x \in \phi(\theta)} f(x, \theta).$$

Si ϕ est continue en θ, alors la fonction marginale f^* est continue, et l'ensemble des maximiseurs ϕ^* est hémicontinue supérieurement à valeurs compactes et non-vides.

Dans notre cas, ϕ est simplement la fonction qui associe à chaque σ_{-i} l'ensemble des stratégies Σ_i du joueur $i \in N$, et f est la fonction de paiement $g_i : \Sigma_i \times \Sigma_{-i} \to \mathbb{R}$. La fonction ϕ étant constante, elle est continue. Chaque ensemble de stratégies mixtes étant compact par finitude du jeu et trivialement non-vide, on a que ϕ est une correspondance à valeurs compactes. Enfin, f est continue car multilinéaire sur un espace de dimension finie.

Donc le théorème de Berge s'applique, et $\phi^* = \mathrm{Br}$ est hémicontinue supérieurement. Enfin, le théorème de Kakutani s'applique à son tour, impliquant l'existence d'un point fixe pour la correspondance de meilleure réponse Br, qui est nécessairement un équilibre de Nash, grâce à la Proposition 1. □

Cette preuve met en avant l'aspect circulaire des prévisions que chacun des joueurs fait en fonction de ce qu'il pense que les autres joueurs vont faire, qui eux-mêmes essayent d'anticiper ce que tous les autres vont faire, etc. Ainsi, seulement un point fixe de la fonction de meilleure réponse a une certaine forme de stabilité quant aux souhaits de déviations des joueurs.

4. Identification des équilibres de Nash

Comme l'extension mixte d'un jeu sous forme normale est elle-même un jeu sous forme normale, les notions de dominations s'étend naturellement aux stratégies mixtes.

Proposition 4. *Une stratégie $\sigma_i \in \Sigma_i$ est strictement dominée par $\tau_i \in \Sigma_i$ si et seulement si pour tout $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$, on a*

$$g_i(\tau_i, \sigma_{-i}) > g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

On peut également continuer à analyser les jeux en utilisant l'élimination itérée de stratégies pures strictement dominées par des stratégies mixtes. L'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes est inchangé par élimination de stratégies strictement dominées, c'est-à-dire qu'aucune stratégie strictement dominée ne fait partie du support d'un équilibre de Nash.

Exemple 7. Dans le jeu représenté par la matrice de gain suivante :

	H	M	B
G	$1,1$	$0,2$	$0,4$
C	$0,2$	$5,0$	$1,6$
D	$0,2$	$1,1,$	$2,1$

La stratégie mixte pour le second joueur $\sigma_2 = \frac{1}{2}G + \frac{1}{2}D$, donne les potentiels paiements

$$g_2(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 4 \\ 1.5 \end{pmatrix},$$

alors que la stratégie pure $\sigma_2' = M$ donne

$$g_2(\sigma_2') = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La stratégie σ_2' est donc strictement dominée, et peut être sereinement ignorée lors de la recherche des équilibres de Nash du jeu, réduisant la dimension de l'ensemble des stratégies mixtes du second joueur. $\lozenge$

Nous avons également les résultats suivants.

Proposition 5. *Un profil $\sigma \in \Sigma$ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si et seulement si pour tout joueur $i \in N$, les assertions suivantes sont vérifiées :*

- *pour toute paire $(s_i, s_i') \in S_i^2$, si $\sigma_i(s_i) > 0$ et $\sigma_i(s_i') > 0$, alors*
$$g_i(s_i, \sigma_{-i}) = g_i(s_i', \sigma_{-i});$$
- *pour toute stratégie pure $s_i \in S_i$, si $\sigma_i(s_i) = 0$, alors $g_i(s_i, \sigma_{-i}) \leq g_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$.*

Ces résultats donnent une première approche pour identifier les équilibres de Nash :

(1) Essayer tous les supports possibles, c'est-à-dire, $\{s_i \in S_i \mid \sigma_i(s_i) > 0\}$;
(2) Trouver les probabilités qui rendent chaque joueur indifférent sur son support ;
(3) Vérifier que les stratégies hors du support ne donnent pas un meilleur paiement.

Exemple 8. Trouvons tous les équilibres de Nash du jeu de coordination suivant :

	D	G
H	$1,1$	$0,0$
B	$0,0$	$1,1$

(1) Premièrement, on vérifie s'il n'y a pas d'équilibres en stratégies dominantes. Dans ce jeu, aucune stratégie pure est strictement dominante ou strictement dominée, même par des stratégies mixtes ;
(2) Ensuite, on cherche les équilibres de Nash en stratégies pures : il y en a deux, (H, D) et (B, G).

(3) On étudie maintenant les stratégies mixtes. Notons par $x \in [0,1]$ la probabilité de jouer H pour le joueur 1, et par $y \in [0,1]$ la probabilité de jouer D pour le joueur 2. Le jeu étant symétrique, on peut adopter le point du joueur 1. Pour avoir une stratégie non-pure, on suppose $x \in \,]0,1[$. Si le joueur 1 est indifférent entre ses deux stratégies pures, alors on a $g_1(H,y) = g_2(B,y)$, donc $y = 1-y$, ce qui implique $y = \frac{1}{2}$. On a alors $x = \frac{1}{2}$.

L'ensemble des équilibres de Nash est alors $\big((H,D),(B,G),(\frac{1}{2}(H+B),\frac{1}{2}(D=G)\big)$. $\Diamond$