INTRODUCTION ET JEUX SOUS FORME SIMPLE

DYLAN LAPLACE MERMOUD

Brèves notes de cours adaptées du cours de Tristan Garrec et du livre intitulé "Bases mathématiques de la théorie des jeux" de Rida Laraki, Jérôme Renault et Sylvain Sorin.

1. Introduction

La théorie des jeux est le domaine mathématique qui étudie les interactions stratégiques entre agents rationnels. Mathématiquement, un jeu peut prendre de nombreuses formes, dont certaines que nous aborderons dans ce cours. Il existe globalement 3 grands sous-domaines de la théorie des jeux, qui peuvent s'intersecter :

- ▷ la *théorie des jeux stratégiques*, dont l'étude porte sur les choix de profils de stratégies choisies par des agents rationnels,
- ▷ la *théorie des jeux coalitionnels*, qui se concentre plus sur l'étude de concept de solutions satisfaisant un ensemble de propriétés précises, et sur la formation de coalitions et de structures combinatoires définies sur lesdites coalitions,
- ▷ la *théorie du choix social*, qui s'intéresse principalement à la prise de décision collective, et la manière dont les agents participent à cette prise de décision en fonction des règles décidées préalablement.

Durant ce cours nous nous intéresserons seulement à la théorie des jeux stratégiques. Dans un jeu stratégique, des agents indépendants dans leur prise de décision choisissent des actions impactant leur environnement.

On suppose que ces agents sont rationnels, dans le sens où ils cherchent à agir de manière cohérente par rapport à un but qu'ils se sont fixé et qui est généralement représenté par une *fonction d'utilité* qu'ils cherchent à maximiser.

Les agents modélisés dans un jeu peuvent être des pays, des animaux, des entreprises, des algorithmes, et pas seulement des êtres humains individuels.

1.1. **Bref historique de la théorie des jeux.** Les origines de la théorie des jeux sont floues, et remontent au moins au dix-neuvième siècle, avec les travaux de Cournot et Condorcet, bien que des analyses de certains jeux spécifiques ont été rédigées bien avant. Cournot a en particulier étudié les situations d'oligopoles. Dans sa publication *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des rochesses*, il a présenté un concept de solution pour ces situations qui correspond à ce que l'on appelle aujourd'hui un équilibre de Nash.

Le développement de la théorie des jeux a connu une grande accélération au début du vingtième siècle avec les travaux de Zermelo, Borel et von Neumann. En particulier, en 1913, Zermelo a publié le résultat suivant.

Théorème 1 (Zermelo, informel)**.**
Dans tout jeu fini, au tour par tour, à deux joueurs, à information complète et sans hasard, soit le premier joueur à agir peut forcer le gain, soit le second joueur peut forcer le gain, soit chacun des deux joueurs peut forcer le match nul.

Si on applique ce résultat au jeu d'échecs, qui est bien un jeu fini au tour par tour à deux joueurs et à information complète sans hasard, alors soit les blancs ont une stratégie gagnante, soit les noirs, soit les deux joueurs peuvent forcer la partie à être nulle. Cependant, savoir que ces stratégies existent n'aident en rien à les identifier.

La théorie des jeux moderne telle qu'on la connait aujourd'hui vient en très grande partie du livre "Theory of Games and Economic Behavior" de John von Neumann et Oskar Morgenstern, publié en 1944. Dans ces travaux, ils exposent des premiers résultats sur l'existence d'équilibres dans les jeux à somme nulle à deux joueurs, qui avaient été démontrés par le premier auteur près de 20 ans plus tôt. On y retrouve aussi les premiers développements de la théorie des jeux coalitionnels et de la théorie de l'utilité espérée, qui a permis l'étude de la prise de décision sous incertitude.

Les résultats sur l'existence d'équilibre a été largement généralisé en 1950 par John Nash, et ces équilibres portent aujourd'hui son nom. Depuis, la théorie des jeux s'est grandement diversifiée, et de nombreux théoriciens des jeux, en particulier Nash, Shapley, Aumann, Harsanyi, et plus récemment Tirole ou Milgrom ont reçu le prix Nobel pour leurs travaux.

Depuis, la théorie des jeux s'applique à de nombreux domaines :

- ▷ en économie,
- ▷ en informatique (théorie des jeux algorithmique, théorie des automates, théorie du choix social),
- ▷ en biologie (théorie des jeux évolutionniste),
- ▷ en recherche opérationnelle (jeux de congestion, jeux d'inspection, jeux de marchés, jeux de flots, jeux de productions linéaires, jeux d'affectation, etc)
- ▷ en mathématiques, et plus particulièrement en théorie des équations aux dérivées partielles pour les jeux différentiels et à champs moyens, et en combinatoire et combinatoire algébrique pour les jeux coalitionnels, etc.

1.2. **Organisation du cours.** L'objectif de ces cinq séances est de présenter quelques fondements de la théorie des jeux stratégiques. Le cours se décompose de la façon suivante :

- ▷ Première partie : introduction, motivations, et exemples ;
- ▷ Deuxième partie : jeux sous forme normale ;
- ▷ Troisième partie : jeux à deux joueurs à somme nulle ;
- ▷ Quatrième partie : jeux sous forme extensive ;
- ▷ Cinquième partie : les équilibres corrélés.

Le cours est en très grande partie inspiré du cours de Tristan Garrec, et se base sur :

- ▷ "Bases mathématiques de la théorie des jeux", Rida Laraki, Jérôme Renault et Sylvain Sorin (2013) ;
- ▷ "Game Theory", Michael Maschler, Eilon Solan et Shmuel Zamir (2013).

2. Exemples

2.1. **Appariements stables, Gale et Shapley (1962).** Soient A et B deux ensembles de même cardinalité, n. On peut supposer que les éléments de A soient des lycéens candidatant à des universités qui composent l'ensemble B. On suppose, pour simplifier, que chaque université ne peut accueillir qu'un seul nouvel étudiant par an.

Chaque élément a des préférences strictes sur les éléments de l'autre ensemble.

Définition 1. Soit X un ensemble. Une *relation de préférence* sur X est une relation binaire $\succ$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- ▷ pour toute paire $(x, y) \in X^2$ telle que $x \neq y$, on a soit $x \succ y$ ou $y \succ x$ (complétude, c'est-à-dire, chaque paire d'éléments distincts est comparable) ;
- ▷ pour tout $x \in X$, on a $x \not\succ x$ (non-réflexivité) ;
- ▷ pour tout triplet $(x, y, z) \in X^3$, si $x \succ y$ et $y \succ z$, alors $x \succ z$ (transitivité).

On note par $a : b_1 \succ b_2$ la préférence de l'élément a entre les éléments b_1 et b_2.

Un appariement est simplement une bijection $\mu : A \to B$. On cherche ici un appariement qui prend en compte les préférences des éléments des deux ensembles.

Définition 2. Une paire $(a, b) \in A \times B$ s'*oppose* à un appariement μ si on a

- ▷ $\mu(a) \neq b$, c'est-à-dire que a et b ne sont pas appairés, et
- ▷ $a : b \succ \mu(a)$, i.e., a préfère b à l'élément avec lequel il est appairé, et
- ▷ $b : a \succ \mu^{-1}(b)$, i.e., b préfère a à l'élément avec lequel il est appairé.

Un appariement est dit *stable* si il aucune paire ne s'y oppose.

Théorème 2 (Gale et Shapley, 1962)**.**
À chaque problème d'appariement, il existe un appariement stable.

Le preuve de ce théorème est directement donnée par l'existence d'un algorithme identifiant un appariement stable, que nous détaillons plus bas. Il existe un algorithme pour chaque ensemble, nous nous mettons ici du côté des lycéens.

Algorithm 1: Algorithme de Gale-Shapley

```
chaque lycéen envoie sa candidature à l'université qu'il préfère
chaque université garde le dossier du lycéen qu'elle préfère, le met en attente, et
  rejette les autres candidatures
while il existe un lycéen sans université do
    chaque lycéen sans université choisit celle qu'il préfère parmi celles qui
      restent
    chaque université met de côté le dossier de l'étudiant qu'elle préfère parmi
      les nouvelles candidatures et le dossier mis de côté à l'étape précédente
end
```

Il est possible d'appliquer l'algorithme dans l'autre sens, c'est-à-dire de laisser les universités contacter les lycéens qu'elles préfèrent, et aux lycéens de mettre en attente et rejeter les propositions des universités, ce qui donne un autre appariement stable.

Exemple 1. Nous avons un ensemble de 4 universités :

$$U = \{\text{Amsterdam},\ \text{Cambridge},\ \text{Edimburgh},\ \text{Sorbonne}\},$$

et un ensemble de 4 lycéens,

$$L = \{\text{Alice},\ \text{Bob},\ \text{Carol},\ \text{Dave}\}.$$

Les préférences de chacun des lycéens ou des universités sont représentées ci-dessous.

	1$^{\text{er}}$	2$^{\text{ème}}$	3$^{\text{ème}}$	4$^{\text{ème}}$
Alice	Amst.	Camb.	Edim.	Sorb.
Bob	Amst.	Sorb.	Edim.	Camb.
Carol	Camb.	Amst.	Edim.	Sorb.
Dave	Sorb.	Camb.	Edim.	Amst.

(A) Préférences des lycéens.

	1$^{\text{er}}$	2$^{\text{ème}}$	3$^{\text{ème}}$	4$^{\text{ème}}$
Amst.	Dave	Carol	Alice	Bob
Camb.	Bob	Dave	Alice	Carol
Edim.	Dave	Alice	Bob	Carol
Sorb.	Carol	Bob	Alice	Dave

(B) Préférences des universités.

On applique l'algorithme de Gale-Shapley du côté des lycéens.

(1) Alice et Bob envoient leurs candidatures à Amsterdam, Carol l'envoie à Cambridge, et Dave à la Sorbonne.
   ▷ L'université d'Amsterdam a reçu deux candidatures, elle a donc le choix et choisit de refuser Bob.

(2) Bob n'est mis en attente par aucune université, il envoie alors sa candidature à l'université qu'il a classé deuxième, la Sorbonne.
   ▷ La Sorbonne a maintenant deux candidatures, celle de Dave reçue à l'étape précédente, et celle de Bob. Préférant Bob à Dave, elle refuse Dave.

(3) Dave se retrouve maintenant sans université, il envoie donc une candidature à son deuxième choix, Cambridge.
   ▷ Cambridge choisit entre Dave et Carol, et, préférant Dave, refuse Carol.

(4) Carol envoie sa candidature à l'université d'Amsterdam.
   ▷ L'université d'Amsterdam choisit de garder Carol et refuse Alice qui était en attente.

(5) Alice envoie sa candidature chez Cambridge.
   ▷ Cambridge la refuse, préférant Dave.

(6) Alice envoie sa candidature à l'université d'Edimburgh.

On a alors l'appariement suivant :

$$\mu(\text{Alice}) = \text{Edimburgh}, \qquad \mu(\text{Bob}) = \text{Sorbonne},$$
$$\mu(\text{Carol}) = \text{Amsterdam}, \qquad \mu(\text{Dave}) = \text{Cambridge}.$$

$\diamondsuit$

Lors de cet exemple, on a vu que les lycéens étaient ceux qui choisissent en premier, ainsi, ils descendaient au fur et à mesure de leur liste de préférence. Au contraire, les université remontaient dans leur liste de préférence. Aussi, une fois qu'une université a reçu une candidature, à chaque étape elle aura au moins un lycéen prêt à l'intégrer.

Nous verrons lors de la séance de travaux dirigés les propriétés suivantes :

- ▷ L'algorithme converge ;
- ▷ L'algorithme converge en au plus n^2 étapes ;
- ▷ L'appariement retourné est stable ;
- ▷ Il n'y a pas unicité des appariements, même stables.

L'algorithme de Gale-Shapley (généralisé) a été utilisé pour apparier des lycéens à des établissements d'enseignement supérieur par le système Admission Post Bac (APB), et par ParcoursSup. Il est également utilisé aux États-Unis pour répartir les étudiants diplômés en médecine dans les différents hôpitaux.

2.2. **Le paradoxe de Braess (1968).** Considérons le réseau routier représenté par le graphe pondéré et dirigé suivant.

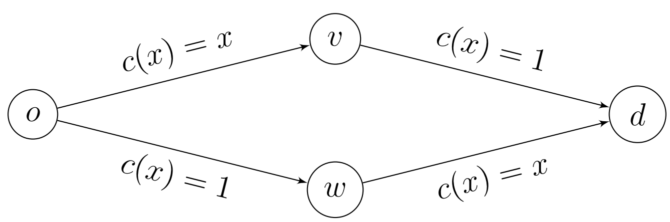

FIGURE 2. Un premier réseau routier.

Des automobilistes, démarrant au sommet o, doivent rejoindre le sommet d le plus rapidement possible. Le label de chaque arc indique la durée de parcours de l'automobiliste, où x représente la proportion de voitures présentes sur l'arc. Ainsi, le temps de parcours du chemin (o, v, d) ou (o, w, d) est de $x + 1$.

Le temps de trajet étant similaire sur les deux chemins possibles, on peut estimer que chaque automobiliste a une chance sur deux d'utiliser l'un des deux arcs, et que le temps de trajet est $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ pour chaque route.

Supposons maintenant qu'une voie rapide, que l'on peut traverser instantanément, entre les sommets v et w.

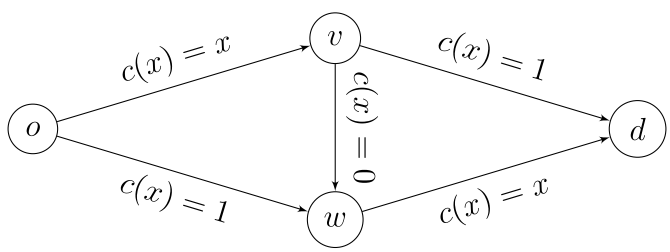

FIGURE 3. Ajout d'une voie rapide.

Analysons la situation. Comme x représente une proportion, on a $0 \leq x \leq 1$. Il y a maintenant trois chemins possibles, comprenant les deux qui étaient déjà mentionnés et (o, v, w, d). Le coût de ce nouveau chemin est $2x$, qui est nécessairement plus faible que le coût $1 + x$ des deux autres chemins. Or, si tout le monde empreinte ce chemin, on a $x = 1$, donc un coût de 2, qui est plus élevé que le coût de chacun des autres chemins avant la construction de la voie rapide.

On voit apparaître dans ce problème une différence claire entre un optimum social, qui consisterait à diviser le trafic en deux pour lui faire emprunter les deux chemins initiaux en parallèle, et l'application de stratégies individuelles par chacun des joueurs qui mène à un coût plus élevé, ou un gain plus faible. Il s'agit plus ou moins du même problème que dans le *dilemme du prisonnier*.

Le *prix de l'anarchie*, défini par Koutsoupias et Papadimitriou, est une mesure de la non-efficacité d'un système lorsque les agents agissent individuellement pour leur seul intérêt. Il se calcule, dans notre cas, en divisant le meilleur temps de trajet possible pour chacun par le temps de trajet obtenu en laissant chaque individu choisir.

3. Jeux sous forme simple

Définition 3. Un *jeu sous forme normale* est la donnée

- ▷ d'un ensemble fini N dont les éléments sont appelés *joueurs* ;
- ▷ d'une famille d'ensembles $\{S_i\}_{i \in N}$, dont les éléments sont appelés *stratégies* ;
- ▷ et d'une famille de *fonctions de paiements* $\left\{g_i : \bigtimes_{j \in N} S_j \to \mathbb{R}\right\}_{i \in N}$.

On dénote par S le produit cartésien $S \coloneqq \bigtimes_{i \in N} S_i$ de tous les ensembles de stratégies, et par S_{-i} le produit cartésien $S_{-i} \coloneqq \bigtimes_{j \in N \setminus \{i\}} S_j$ des ensembles de stratégies de tous les joueurs sauf le joueur i.

L'interprétation de ces données est la suivante : chaque joueur choisit une action dans son ensemble de stratégies. Ce choix est simultané et/ou indépendant, c'est-à-dire que le choix d'un joueur se fait sans observation d'une information quelconque pouvant le renseigner sur les choix faits par les autres joueurs. Le jeu est joué en une seule fois, et les joueurs ont choisis les actions $(s_1, \ldots, s_n)$, alors le joueur i reçoit le paiement $g_i(s_1, \ldots, s_n)$.

Lors de l'analyse de jeux, nous faisons plusieurs hypothèses implicites :

1. chaque joueur est "rationnel", c'est-à-dire qu'il cherche à maximiser g_i, peu importe ce que cette fonction représente ;
2. chaque joueur a une connaissance complète des fonctions de paiement et des ensembles de stratégies des autres joueurs. Autrement dit, on se place ici dans le cadre de jeux à *information complète* ;
3. chaque joueur sait que les autres joueurs sont rationnels, autrement dit, chaque joueur s'attend à ce que chacun maximise sa fonction de paiement en fonction des stratégies disponibles.

Exemple 2 (Jeu de coordination)**.** Deux amis doivent décider (indépendamment) s'ils vont au cinéma ou au théâtre à une certaine heure. Alice préfère le cinéma tandis que Bob préfère le théâtre, mais tous préfèrent être ensemble que seul. Le jeu sous forme simple s'écrit donc :

- ▷ $N = \{\text{Alice}, \text{Bob}\}$;
- ▷ $S_1 = S_2 = \{C = \text{cinéma}, T = \text{théâtre}\}$;
- ▷ $g_1(C, C) = 2$, $g_1(T, T) = 1$, $g_2(C, C) = 1$, $g_2(T, T) = 2$ et $g_i(s_2, s_2) = 0$ sinon.

Il est bien souvent plus facile de lire un jeu à deux joueurs sous forme normale en tant que bimatrice. Dans ce cas, nous avons :

	C	T
C	$2, 1$	$0, 0$
T	$0, 0$	$1, 2$

Une bimatrice se lit de la façon suivante : le choix des lignes est propre au premier joueur, ici Alice, et le choix des colonnes dépend du second joueur, ici Bob. L'intersection entre les lignes et colonnes choisies donne le profil de paiement, le premier coefficient correspondant au paiement d'Alice, le second au paiement de Bob. ♢

Exemple 3 (Tir de penalty)**.** Un tireur de penalty et un gardien de but se font face. Le tireur peut tirer à gauche ou à droite, le gardien peut plonger à gauche ou à droite également. Le jeu sous forme normale s'écrit alors :

- ▷ $N = \{\text{gardien}, \text{tireur}\}$;
- ▷ $S_1 = S_1 = \{G = \text{gauche}, D = \text{droite}\}$;
- ▷ $g_1(s_1, s_2) = 1$ si $s_1 = s_2$ et -1 sinon. On a $g_2 = -g_1$.

La bimatrice équivalente s'écrit :

	G	D
G	$1, -1$	$-1, 1$
D	$-1, 1$	$1, -1$

Ce jeu est un jeu *à somme nulle*, le gain d'un joueur et la perte de l'autre. Il s'agit d'une importante classe de jeux, avec des propriétés particulières. ♢

Exemple 4 (Le dilemme du prisonnier)**.** Deux membres supposés d'une organisation criminelle sont arrêtés et interrogés. Chaque personne est dans une salle distincte avec aucun moyen de communication. Les enquêteurs avouent ne pas avoir assez d'éléments. Ils proposent alors à chacun des accusés de trahir l'autre personne, en échange d'une remise de peine.

Si une personne trahit son partenaire alors que l'autre s'est tût, elle ressort libre et le partenaire écope d'une peine de quatre ans de prison, et inversement. Si personne ne parle, les enquêteurs ont juste assez de preuve pour leur faire prendre chacun un an de prison. Si chacun trahit, bien que chacun ait un allègement de peine, il y a assez de preuves pour que chacun des joueurs fasse trois ans de prison.

Le jeu s'écrit :

- ▷ $N = \{j_1, j_2\}$;
- ▷ $S_1 = S_2 = \{S = \text{silence}, T = \text{trahir}\}$;
- ▷ On donne directement les fonctions de paiment sous forme de bimatrice:

	T	S
T	$-3, -3$	$0, -4$
S	$-4, 0$	$-1, -1$

Analysons la situation. Pour chacun des choix faits par l'autre joueur, la perte est toujours plus faible lorsque le joueur utilise la stratégie T que la stratégie S. En effet, si le joueur j_2 choisit de trahir, le joueur j_1 perd 3 en trahissant, ou 4 en se taisant. Si le joueur j_2 choisit au contraire de rester silencieux, le joueur j_1 peut sortir libre directement en trahissant, plutôt que de faire un an de prison en se taisant lui-aussi. Il s'agit d'une *stratégie dominante*, concept que nous aborderons sous peu. Le jeu est symétrique, donc le joueur j_2 tient exactement le même raisonnement. Ainsi, si chaque joueur joue de cette manière, tout le monde fait 3 ans de prison, alors qu'il était possible que chacun n'en fasse qu'une. On se retrouve dans la même situation que le paradoxe de Braess. $\Diamond$

Définition 4 (Stratégie dominée)**.** Considérons un jeu sous forme normale, avec les notations usuelles, et i un joueur. Une stratégie $\sigma_i \in S_i$ est dire *strictement dominée* par $s_i \in S_i$ si pour tout $s_{-i} \in S_{-i}$, on a

$$g_i(\sigma_i, s_{-i}) < g_i(s_i, s_{-i}).$$

Un joueur rationnel, c'est-à-dire, qui cherche à maximiser sa fonction de paiement, n'a aucun intérêt à jouer une stratégie dominée, car il existe une stratégie alternative qui lui assure un paiement supérieur dans tous les scenarii possibles.

Définition 5 (Stratégie dominante)**.** Une stratégie $\sigma_i \in S_i$ est *strictement dominante* si elle domine strictement toutes les autres stratégies, c'est-à-dire, pour tout $s_i \in S_i \setminus \{\sigma_i\}$, et pour tout $s_{-i} \in S_{-i}$, on a

$$g_i(\sigma_i, s_{-i}) > g_i(s_i, s_{-i}).$$

La relation de domination stricte défini un ordre strict partiel sur l'ensemble des stratégies de chacun des joueurs.

Définition 6 (Équilibre en stratégies strictement dominantes)**.** Un profil de stratégie $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ est un *équilibre en stratégies strictement dominantes* si, pour tout joueur $i \in N$, la stratégie s_i est strictement dominante.

Il s'agit d'un équilibre relativement rare, car il n'existe pas souvent de stratégie strictement dominante. Cependant, si un équilibre en stratégies strictement dominantes existe, alors on peut s'attendre à ce qu'il soit joué par les joueurs.

Remarque 1. Dans l'exemple du jeu de coordination, aucune stratégie n'est strictement dominante, tout comme dans le jeu du tir de penalty. Cependant, comme nous avons déjà remarqué, l'action $T =$ 'trahir' du dilemme du prisonnier est une stratégie strictement dominante.

Les hypothèses implicites que nous avons faites plus tôt impliquent plusieurs choses quant au comportement des joueurs :

(1) si les joueurs sont rationnels, alors ils ne jouent pas de stratégie strictement dominée ;
(2) si les joueurs ont une connaissance complète du jeu, ils savent que les autres joueurs ne vont pas jouer leurs stratégies strictement dominées ;
(3) ainsi, lorsque chaque joueur analyse ses propres stratégies pour savoir lesquelles jouer, il doit prendre en compte les réflexions des autres joueurs, et par exemple ignorer les stratégies strictement dominées des autres joueurs, ce qui peut faire apparaitre de nouvelles stratégies strictement dominées dans son propre ensemble de stratégies.

On peut ainsi appliquer une élimination itérée des stratégies strictement dominées d'un jeu lors de son analyse. Si au terme de cette procédure tous les ensembles d'actions sont des singletons, ils ne dépendent pas de l'ordre dans lequel on a supprimé des stratégies strictement dominées. Le jeu est dit *résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées.*

Exemple 5. Considérons le jeu suivant :

	A_2	B_2	C_2	D_2
A_1	$5, 2$	$2, 6$	$1, 4$	$0, 4$
B_1	$0, 0$	$3, 2$	$2, 1$	$1, 1$
C_1	$7, 0$	$2, 2$	$1, 5$	$5, 1$
D_1	$9, 5$	$1, 3$	$0, 2$	$4, 8$

Parmi les stratégies du second joueur, la stratégie A_2 est strictement dominée par D_2, donc des joueurs rationnels ne font pas la différence entre le jeu initial et le jeu

	A_2	B_2	C_2	D_2
A_1	$5, 2$	$2, 6$	$1, 4$	$0, 4$
B_1	$0, 0$	$3, 2$	$2, 1$	$1, 1$
C_1	$7, 0$	$2, 2$	$1, 5$	$5, 1$
D_1	$9, 5$	$1, 3$	$0, 2$	$4, 8$

À présent, la stratégie A_1 est strictement dominée par B_1, et la stratégie D_1 est strictement dominée par C_1. Ces deux stratégies ne seront donc jamais jouées, et la situation se simplifie un peu plus :

	~~A_2~~	B_2	C_2	D_2
~~A_1~~	~~$5, 2$~~	~~$2, 6$~~	~~$1, 4$~~	~~$0, 4$~~
B_1	~~$0, 0$~~	$3, 2$	$2, 1$	$1, 1$
C_1	~~$7, 0$~~	$2, 2$	$1, 5$	$5, 1$
~~D_1~~	~~$9, 5$~~	~~$1, 3$~~	~~$0, 2$~~	~~$4, 8$~~

Dorénavant, la stratégie D_2 est strictement dominée par la stratégie B_2. On obtient la situation suivante :

	~~A_2~~	B_2	C_2	~~D_2~~
~~A_1~~	~~$5, 2$~~	~~$2, 6$~~	~~$1, 4$~~	~~$0, 4$~~
B_1	~~$0, 0$~~	$3, 2$	$2, 1$	~~$1, 1$~~
C_1	~~$7, 0$~~	$2, 2$	$1, 5$	~~$5, 1$~~
~~D_1~~	~~$9, 5$~~	~~$1, 3$~~	~~$0, 2$~~	~~$4, 8$~~

Enfin la stratégie C_1 est strictement dominée par B_1, ainsi :

	~~A_2~~	B_2	C_2	~~D_2~~
~~A_1~~	~~$5, 2$~~	~~$2, 6$~~	~~$1, 4$~~	~~$0, 4$~~
B_1	~~$0, 0$~~	$3, 2$	$2, 1$	~~$1, 1$~~
~~C_1~~	~~$7, 0$~~	~~$2, 2$~~	~~$1, 5$~~	~~$5, 1$~~
~~D_1~~	~~$9, 5$~~	~~$1, 3$~~	~~$0, 2$~~	~~$4, 8$~~

Parmi les deux seules options qui restent, le joueur j_2 préfère jouer B_2, donc C_2 est strictement dominée, et nous obtenons finalement :

	~~A_2~~	B_2	~~C_2~~	~~D_2~~
~~A_1~~	~~$5, 2$~~	~~$2, 6$~~	~~$1, 4$~~	~~$0, 4$~~
B_1	~~$0, 0$~~	$3, 2$	~~$2, 1$~~	~~$1, 1$~~
~~C_1~~	~~$7, 0$~~	~~$2, 2$~~	~~$1, 5$~~	~~$5, 1$~~
~~D_1~~	~~$9, 5$~~	~~$1, 3$~~	~~$0, 2$~~	~~$4, 8$~~

Le jeu est donc résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées, et il est attendu que les joueurs jouent le profil (B_1, B_2). $\Diamond$

On peut également définir une notion de faible domination.

Définition 7. La stratégie $\sigma_i \in S_i$ est *faiblement dominée* par $s_i \in S_i$ si pour tout $s_{-i} \in S_{-i}$, on a

$$g_i(\sigma_i, s_{-i}) \leq g_i(s_i, s_{-i}),$$

et il existe un profil $\sigma_{-i} \in S_{-i}$ tel que $g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) < g_i(s_i, \sigma_{-i})$.

La différence avec la définition de la domination stricte est que l'on demande une inégalité stricte que sur au moins un profil σ_{-i}, et non sur tous. De cette définition découlent les suivantes.

Définition 8. La stratégie $\sigma_i \in S_i$ est *dominante* si pour toute stratégie $s_i \in S_i$ et pour tout profil $s_{-i} \in S_{-i}$, on a

$$g_i(\sigma_i, s_{-i}) \geq g_i(s_i, s_{-i}).$$

Définition 9. Un profil de stratégie $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ est un *équilibre en stratégies dominantes* si pour tout joueur $i \in N$, la stratégie s_i est dominante.

Cependant, il n'y a plus unicité lors d'une élimination itérée de stratégies dominées, nous ne pouvons pas nous servir de cet outil pour analyser un jeu de manière fiable.

Exemple 6. Considérons la matrice de gain suivante :

	G	D
H	$1, 1$	$0, 0$
M	$1, 1$	$2, 1$
B	$0, 0$	$2, 1$

Pour le joueur j_1, deux de ses stratégies sont faiblement dominées par la troisième, M. Si nous éliminons la stratégie H en premier, on obtient la situation

	G	D
~~H~~	~~$1, 1$~~	~~$0, 0$~~
M	$1, 1$	$2, 1$
B	$0, 0$	$2, 1$

pour laquelle la stratégie G devient faiblement dominée. Or, si nous avions éliminé la stratégie B en premier, nous serions dans la situation

	G	D
H	$1, 1$	$0, 0$
M	$1, 1$	$2, 1$
~~B~~	~~$0, 0$~~	~~$2, 1$~~

pour laquelle la stratégie D est faiblement dominée.

$\Diamond$