Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L2 MIASHS 2022/2023

Partiel - Algèbre Linéaire 2
4 mai 2023

La durée de l'examen est de 1h50. Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. La qualité et la précision de l'argumentation entreront de manière importante dans l'évaluation. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et est susceptible de changer.

Exercice 1 (6 pts)

On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à deux, et l'application définie par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = Q \quad \text{avec} \quad Q(X) = (X^2-1)P''(X) + (2X+1)P'(X).$$

2 1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

1 2. Donner la base canonique $\mathscr{B}_0$ de E et calculer A la matrice représentative de f dans $\mathscr{B}_0$.

2 3. Trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale que l'on précisera (on ne demande pas de calculer P^{-1}).

1 4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_0(X) = 1+X$. Expliquer <u>précisément</u> comment calculer $f^n(P_0) = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}(P_0)$.

Exercice 2 (8 pts)

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1])$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur $[0,1]$ et φ l'application définie par

$$\forall f, g \in E, \quad \varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$

1,5 1. Montrer que φ est une application bilinéaire symétrique.

2 2. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

1,5 3. Soit $F = \{f \in E \,|\, \exists c \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = cx \text{ pour tout } x\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

1 4. Calculer $F^\perp$, l'orthogonal de F pour le produit scalaire φ.

2 5. Donner une base de F et montrer que la projection orthogonale de E sur F est donnée par

$$\forall g \in E, \quad p_F(g) = f, \quad \text{avec} \quad f(x) = (g(1) - g(0))x.$$

Exercice 3 (6 pts)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $u = (x,y)$ et $u' = (x', y')$ dans $\mathbb{R}^2$

$$\varphi(u, u') = xx' + ayy' + (b-3)xy' + (1-b)x'y + cxy$$

1 1. (a) Montrer que si $c \neq 0$, φ n'est pas bilinéaire.

1 (b) Si $c = 0$, trouver une condition nécessaire et suffisante sur b pour que φ soit symétrique.

1 (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que φ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

1 2. À partir de maintenant, on suppose que $a = b = 2$ et $c = 0$. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire φ. On notera $\|\cdot\|$ la norme induite par φ.

2 3. Soit $u_0 = (1,1)$. Pour tout $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $p_F(u)$, le projeté orthogonal de u sur $F = \text{Vect}(u_0)$. En déduire $d(u,F) = \inf_{v \in F} \|u - v\|$.