Interrogation d'analyse S5, 17 novembre 2022, durée 1h30
Aucun document, aucune calculatrice n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Toute affirmation doit être justifiée. Le barème est indicatif.

Cours (4 points). Définition de la limite (d'une suite).

Exercice 1 (6 points). Soit le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$A =]0;1]^2.$$

1. A est-il un fermé, un ouvert de $\mathbb{R}^2$?
2. A est-il un fermé de $(\mathbb{R}_*^+)^2$?

Exercice 2 (6 points). On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}$:

$$Q_2 = \left\{ \frac{p}{2^q},\ (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}.$$

1. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe $y \in Q_2$ tel que :

$$y \leq x \leq y + \varepsilon.$$

En déduire que $\overline{Q_2} = \mathbb{R}$.
2. Déterminer $\overset{o}{Q_2}$.

Exercice 3 (4 points). Soit $(E, \|.\|)$ un e.v.n. et A une partie de E. On suppose que A est complet. Démontrer que A est un fermé de E.

Correction succincte des exercices.

Exercice 1.
1. La suite d'éléments de A, $(1/n, 1/n)_{n\geq 1}$ converge vers $(0,0)$ qui n'est pas dans A, donc A n'est pas fermé. De même, la considération de la suite $(1+1/n, 1+1/n)_{n\geq 1}$ démontre que ${}^cA$ n'est pas fermé, et donc que A n'est pas ouvert.
2. Puisque l'on peut écrire :

$$A = (\mathbb{R}_*^+)^2 \cap [-1,1]^2$$

et que $[-1,1]^2$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ (par exemple c'est la boule de centre $(0,0)$ et de rayon 1 pour la norme infinie, ou bien dire que c'est un produit de deux fermés de $\mathbb{R}$), A est un fermé de $(\mathbb{R}_*^+)^2$ (caractérisation des fermés pour la topologie trace).

Exercice 2.
1. La suite $(1/2^q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, je peux donc trouver un entier q pour lequel $1/2^q \leq \varepsilon$. Cherchons y sous la forme $y = p/2^q$ de sorte que $y \leq x \leq y + 1/2^q$, ce qui assurera bien les conditions demandées. Multipliant par 2^q, nous voyons que nous souhaitons avoir $p \leq 2^q x \leq p+1$. Il suffit donc de choisir pour p la partie entière de $2^q x$.
Nous avons $Q_2 \subset \mathbb{R}$ et puisque $\mathbb{R}$ est fermé, $\overline{Q_2} \subset \mathbb{R}$. Il s'agit alors de démontrer $\mathbb{R} \subset \overline{Q_2}$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, posant $\varepsilon = 1/2^k$, nous obtenons alors un y_k pour lequel $0 \leq x - y_k \leq 1/2^k$, ce qui permet de dire que la suite $(y_k)_k$ tend vers x, et c'est une suite d'éléments de Q_2, d'où la conclusion.
2. Le plus court est de constater que $Q_2 \subset \mathbb{Q}$; puisque $\overset{o}{\mathbb{Q}} = \emptyset$, il vient :

$$\emptyset \subset \overset{o}{Q_2} \subset \overset{o}{\mathbb{Q}} = \emptyset,$$

d'où $\overset{o}{Q_2} = \emptyset$.
Autre méthode : on pourrait également démontrer que $\overline{{}^cQ_2} = \mathbb{R}$, en considérant par exemple la suite $(y_k + \frac{\pi}{2^k})_k$ puis passer au complémentaire.

Exercice 3. Prenons une suite $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ ayant une limite $\bar{x}$ dans E. Puisque la suite converge dans E, elle est de Cauchy dans E, et donc dans A. Comme A est complet, elle converge donc dans A, ce qui assure que $\bar{x} \in A$, ce qui conclut.