Examen partiel n°1 - Mathématiques

Relations binaires

Rappeler la définition d'une relation d'ordre et d'une relation d'équivalence.

Espaces vectoriels

Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des espaces vectoriels.

(1) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}$,
(2) $E_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$,
(3) $E_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}$,
(4) $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0\}$.

Bases et espace engendré

Soit $\mathcal{F} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ avec

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(1) La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ?
(2) Déterminer la dimension de $\mathrm{vect}(\mathcal{F})$, l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$.
(3) Trouver les conditions sur α et β pour que le vecteur $\mathbf{u}$ défini par

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

appartienne à l'espace $\mathrm{vect}(\mathcal{F})$.