Contrôle continu n°2 - Mathématiques

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie, pour tout $\boldsymbol{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par

$$f(\boldsymbol{u}) = (x - y, x + 2y - 3z, -y - 3z).$$

Soit $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1) Déterminer $f(\boldsymbol{e_i})$, pour $i = 1, 2, 3$.
(2) Déterminer une base de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie, pour tout $\boldsymbol{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par

$$f(\boldsymbol{u}) = (x + y + z, x - z).$$

Déterminer une base de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3

Dans les cas suivants, justifier que F est un hyperplan de E. En déduire sa dimension et une base.

(1) $E = \mathbb{R}^4, F = \{(x, y, z, t) \in E \mid 2x + y - z = -3t\}$;
(2) $E = \mathbb{R}_2[X], F = \{P \in E \mid P'(1) = 0\}$.

Exercice 4

Calculer le déterminant de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En déduire une valeur propre de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

puis trouver les autres valeurs propres de B.