Contrôle continu n°1 - Mathématiques

Exercice 1

(1) Donner la définition de la réflexivité, de la transitivité, de la symétrie et de l'anti-symétrie.
(2) Qu'est-ce qu'une relation d'équivalence ? Qu'est-ce qu'une relation d'ordre ? Qu'est-ce qu'une relation totale ?
(3) À l'aide d'une table de vérité, montrer que "$\neg(A \vee B)$" est équivalent à "$\neg A \wedge \neg B$".
(4) À l'aide d'une table de vérité, montrer que "$A \implies B$" est équivalent à "$\neg A \vee B$".
(5) Pour un entier naturel n, on considère la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_n : 5^n \geq 3^n + 4^n.$$

Montrer que, pour $n \geq 2$, $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$. Pour quelles valeurs de n, $\mathcal{P}_n$ est-elle vraie ?

Exercice 2

Pour chacun des sous-espaces ci-dessous, vérifier si ceux-ci sont vectoriels ou non.

- $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0\}$;
- $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$;
- $E_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}$;
- $E_4 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(0) = 0\}$;
- $E_5 = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = u_{10} - u_{11}\}$.

Exercice 3

Soient $a = (2, 3, -1)$, $b = (3, 7, 0)$, $c = (1, -1, -2)$, $d = (5, 0, -7)$. Soient $E = \text{vect}(a, c)$ et $F = \text{vect}(b, d)$. Montrer que $E = F$.

Exercice 4

Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au sous-espace vectoriel engendré par le système $\{u_1 = (1, -1, 1, 2), u_2 = (-1, 2, 3, 1)\}$.

Exercice 5

Déterminer les coordonnées du polynôme $X^2 + 3X + 2$ dans la base

$$\{3, (2X - 1), (X^2 + X - 1)\}.$$