Année scolaire 2020/2021 Première année du magistère d'économie

Contrôle continu de mathématiques

Durée : 1h30. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1

Démontrer les équivalences suivantes :

$$\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q, \quad \neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q, \quad [P \implies Q] \iff \neg P \wedge Q.$$

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_n : 5^n \geq 3^n + 4^n.$$

Montrer que, si $n \geq 2$, $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$. Pour quelles valeurs de n la propriété $\mathcal{P}_n$ est-elle vraie ?

Exercice 3

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x - y + z, x + 2y - z)$.

1. Déterminer la matrice de f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2. On pose
$$\mathbf{u_1} = (1, 1, 0), \quad \mathbf{u_2} = (1, 0, 1), \quad \mathbf{u_3} = (0, 1, 1).$$
ainsi que
$$\mathbf{v_1} = (-2, 1), \quad \mathbf{v_2} = (1, 1).$$
Montrer que $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ (resp. $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$) forme une base de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$). Déterminer la matrice de f relativement à ces deux bases.

Exercice 4

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(B)$. Déterminer une base du noyau et une base de l'image pour chacune des applications linéaires associées f_A et f_B.