Examen partiel n°2 - Mathématiques

Exercice 1

Justifier si les espaces suivants sont des espaces vectoriels, pour les additions et les multiplications par un scalaire usuelles.

- $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 = 0\}$,
- $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x - y + 5 = 1\}$.
- $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2+5y^2+3z^2 = 0\}$,
- $E_4 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = -f(-2)\}$.
- $E_5 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 \leq u_1\}$,
- $E_6 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n\}$.

Exercice 2

Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que la famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ est libre si et seulement si il en va de même pour $\{\mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\}$.

Exercice 3

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x+y, 2x-y+z)$.

(1) Déterminer la matrice de f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

(2) On pose
$$\mathbf{u_1} = (1,-1,1),\ \mathbf{u_2} = (0,-1,0) \text{ et } \mathbf{u_3} = (1,0,2),$$
ainsi que
$$\mathbf{v_1} = (-1,3) \text{ et } \mathbf{v_2} = (-2,-1).$$
Montrer que $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ (resp. $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$) forme une base de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$). Déterminer la matrice de f relativement à ces deux bases.

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$, l'espace des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 5. On considère l'application Δ qui, à $P \in E$, associe $\Delta(P) = Q$ défini par
$$Q(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

(1) Montrer que Δ est un endomorphisme de E.

(2) Calculer $\Delta(X^k)$, pour tout $0 \leq k \leq 5$.

(3) Déterminer le noyau, l'image et le rang de Δ.

(4) Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_3[X]$, il existe un $P \in E$ tel que $\Delta(P) = Q$.

(5) Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_3[X]$, il existe un unique $P \in E$ tel que $P(0) = P'(0) = 0$ et $\Delta(P) = Q$.